TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

ÖTÖDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Egy négyjegyű számról ezeket tudjuk:
(1) van 3 egymást követő számjegye;
(2) ezek közül az egyik duplája egy másiknak;
(3) a 4 db számjegy összege 10;
(4) a 4 db számjegy szorzata 0;
(5) a 4-jegyű szám első 2 jegyéből álló 2-jegyű szám 3-mal nagyobb, mint az utolsó 2 jegyéből álló 2-jegyű szám.
Melyik ez a 4-jegyű szám?

1. megoldás
(1) és (2) miatt ezek a szomszédos hármasok jönnek szóba: $(0,1,2)$; $(1,2,3)$; $(2,3,4)$. (***2** pont*)
(4) miatt az egyik jegy 0, és (3) miatt az összeg 7, ezért $(0,1,2,3)$; $(0,2,3,4)$ nem lehetnek a jegyek. Így $(0,1,2,7)$ a négy számjegy. (★) (***2** pont*)
Végül (5) miatt a megoldás a 2017, (***1** pont*)
mert a 0 nem állhat az első helyen, és a 7 túl nagy, az 1 pedig túl kicsi lenne az első helyre ahhoz, hogy az első két jegyből álló szám 3-mal nagyobb lehessen a második kettőből állónál. (***2** pont*)
Összesen: 7 pont

2. megoldás
Folytatás (★)-tól.
Így a szám első két jegye lehet: 10, 12, 17, 20, 21, 27, 70, 71, 72. (***1** pont*)
Ezek közül a maradék számjegyekkel csak a 20 fejezhető be az (5) feltételnek megfelelően. (***1** pont*)
A megoldás 2017. (***1** pont*)

2. (a) Írj be + és − jeleket a $\odot$ szimbólumok helyére úgy, hogy az egyenlőség teljesüljön!

$$1 \odot 2 \odot 3 \odot 4 \odot 5 \odot 6 \odot 7 = 0$$

(b) Hányféle módon lehet beírni a + és − jeleket úgy, hogy az egyenlőség teljesüljön?

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás

1-től 7-ig a számok összege 28, (***1** pont*)

tehát összesen 14 lesz azoknak a számoknak az összege, amelyek elé $-$ kerül (és az 1 elé nem írható $-$). (***1** pont*)

Mivel két szám összege legfeljebb $6 + 7 = 13$, ezért legalább 3 szám elé kell $-$ jel. (***1** pont*)

De akkor legfeljebb 4 elé írhatunk $-$ jelet, mert ha néhány szám összege 14, akkor a maradék számok összege szintén 14. (***1** pont*)

Tehát 3, vagy 4 db $-$ jel kiosztásával megtalálható az összes lehetőség:

$$\begin{gathered}1-2+3+4-5+6-7\\1+2-3-4+5+6-7\\1+2-3+4-5-6+7\\1-2-3-4-5+6+7.\end{gathered}$$

(***3** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha csak 3 megoldást talál meg, akkor 2 pont, ha egy, vagy két megoldást talál, akkor 1 pont adható az utolsó 3-ból.

3. Egy ötjegyű számot írásban megszoroztunk egy kétjegyűvel, a szorzat hatjegyű lett. Sajnos a számjegyek nagy része elmosódott, ezeket $\star$ jelöli. Állítsd helyre a szorzást! Indokolj.

$$\begin{array}{cccccccc}\star&3&0&7&4&\cdot&\star&\star\\\hline\star&\star&5&1&8&&&\\&\star&5&\star&\star&\star&&\\\hline\star&\star&\star&\star&\star&\star&&\end{array}$$

Megoldás

$$\begin{array}{cccccccc}1&3&0&7&4&\cdot&7&5\\\hline9&1&5&1&8&&&\\&6&5&3&7&0&&\\\hline9&8&0&5&5&0&&\end{array}$$

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a megoldás nem tökéletes, akkor az alábbi részpontszámok adhatók:

Ha a szorzóban az első számjegy 7. (***1** pont*)

Ha a szorzandó 13074. (***1** pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Ha az első részletszorzat 91518. (***1** pont*)
Ha a szorzóban a második számjegy 5. (***2** pont*)
Ha a második részletszorzat 65370. (***1** pont*)
Ha a szorzat 980550. (***1** pont*)

Részletes indoklás, amit a feladat szövege nem kért:
A kétjegyű szám első számjegye csak 7 lehet, hiszen a 4 egyjegyű számú többszörösei közül csak a 8 és a 28 végződik 8-ra, viszont látszik, hogy 2 nem lehet az első számjegy, mert akkor nem lenne tízes átvitel és a 7 alatt 4-nek kellene állnia. Ebből az is következik, hogy a második sor második helyén 1 áll.
Ugyanezt úgy is be lehet látni, hogy mivel az ötjegyű szám harmadik jegye 0, ezért a kétjegyű szám első jegye $518 : 74 = 7$.

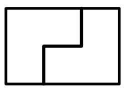
$$\begin{array}{cccccccc}
\star & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & \mathbf{7} & \star \\
\cline{1-5}
\star & \mathbf{1} & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & \star & 5 & \star & \star & \star & & \\
\cline{1-6}
\star & \star & \star & \star & \star & \star & &
\end{array}$$

A harmadik sorban szereplő 5 csak úgy jöhet ki, ha a kétjegyű szám második jegye 5. Hiszen az 5-öt úgy kapjuk, hogy a kétjegyű szám második jegyét megszorozzuk 3-mal, és hozzáadjuk az előző lépésből kapott maradékot. De maradék nincs, hiszen az előző lépésben 0-t szoroztunk valamivel. A 3 egyjegyű számú többszörösei között pedig a 15 az egyetlen, ami 5-re végződik.
Ezek alapján a szorzás eddig megfejthető:

$$\begin{array}{cccccccc}
\star & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & 7 & \mathbf{5} \\
\cline{1-5}
\star & 1 & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & \star & 5 & \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & & \\
\cline{1-6}
\star & \star & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

Az eredeti 5-jegyű szám első számjegye csak az 1-es lehet, hiszen egy 20 000-nél nagyobb szám 75-szöröse biztosan 6-jegyű, márpedig a második sorban egy ötjegyű szám látható. Tehát az összeszorzott számok: 13074 és 75.

4. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a 2×3-as, ahogy az alábbi ábrán is látható.

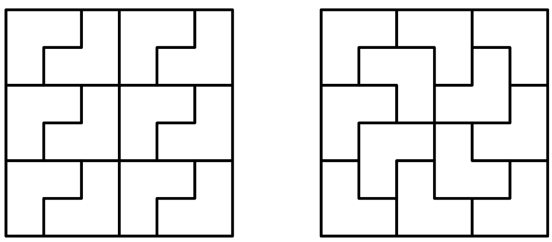


   (a) Kirakható-e ilyen L-alakú elemekkel egy 5×5-ös négyzet?

(b) Kirakható-e ilyen L-alakú elemekkel egy 6×6-os négyzet?

(c) Kirakható-e a fenti két négyzet közül valamelyik úgy, hogy a kirakásban szereplő elemek közül semelyik kettő nem alkot egy 2×3-as téglalapot?

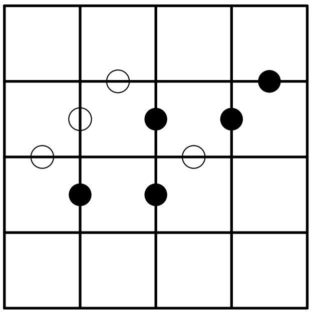
(A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a négyzetlapot.) **Megoldás** Egy L-alakú elem három négyzetet fed le, ezért az L-alakú elemekkel kirakható alakzatok területe biztosan osztható 3-mal. Az 5×5-ös négyzet területe 25 egység, ami nem osztható 3-mal, ezért a kirakás nem lehetséges. (***2** pont*)
A 6×6-os négyzet kirakható L-alakú elemekkel. Például egy lehetséges megoldás, ha 6 db 2×3-as téglalapból rakjuk ki (ld. bal oldali ábra). (***2** pont*)
Létezik azonban olyan kirakás is, amelyben semelyik két elem nem alkot 2×3-as téglalapot (ld. jobb oldali ábra), ezért a (c) kérdésre is igen a válasz. (***3** pont*)



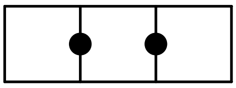
Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Amennyiben a tanuló a (c) kérdésre megfelelő konstrukciót ad, az egyben a (b) kérdést is eldönti. Tehát nem feltétlenül szükséges kétféle kirakás. Az indoklás, konstrukció nélküli igen/nem válaszokra nem jár pont.

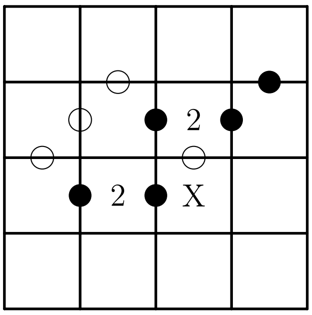
5. Az ábrán látható 4×4-es táblázatot kell kitöltenünk az 1, 2, 3, 4 számokkal. A szabályok a következők:
(1) Egy adott szám minden sorban és minden oszlopban egyszer szerepel.
(2) Ha két négyzet közös oldalán egy üres karika látható, akkor azokban a négyzetekben szomszédos számok szerepelnek.
(3) Ha két négyzet közös oldalán egy teli karika látható, akkor azokban a négyzetekben két olyan szám szerepel, melyek közül az egyik duplája a másiknak.
Írd be a számokat a szabályok alapján! Indokold, hogy ez az egyetlen megoldás!



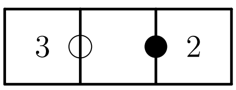
Megoldás
A teli karikák szomszédai ezek a párok lehetnek: $(1;2)$, $(2;4)$, ezért az alábbi rész középső mezőjén csak a 2 állhat. (***2** pont*)



Ha beírjuk ezeket a 2-eseket, akkor az X jelű mezőbe csak 1-es kerülhet, mert ez szomszédja is a 2-nek, és fele vagy kétszerese is. (***1** pont*)



A harmadik sorban az első mezőbe már csak 4-es kerülhet, mert 1-es már van a sorban. Ez a sor tehát balról jobbra: 4, 2, 1, 3. (***1** pont*)
A 4 fölé 3 kerül, mert csak ez szomszédos a 4-gyel, így a 2. sorban a 3 és 2 közé csak a 4-et írhatjuk a két karika jelzésének megfelelően. Ezért ebben a sorban az utolsó mezőbe 1 kerül. (***1** pont*)



Az első sorban az 1 fölé csak 2, a 4 fölé csak 3 kerülhet (a karikák útmutatása szerint). Mivel egy sorban és egy oszlopban ugyanaz a szám csak egyszer szerepelhet, ebben a sorban az első helyre már csak az 1-es, az utolsóra a 4-es kerülhet. (***1** pont*)

Az utolsó sorban azokat a számokat helyezzük el, amelyek az oszlopból még hiányoznak. Így a helyes kitöltés:

1	3	4	2
3	4	2	1
4	2	1	3
2	1	3	4

(***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HATODIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Egy ötjegyű számot írásban megszoroztunk egy kétjegyűvel, a szorzat hatjegyű lett. Sajnos a számjegyek nagy része elmosódott, ezeket $\star$ jelöli. Állítsd helyre a szorzást!

$$\begin{array}{cccccccc}
\star & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & \star & \star \\
\hline
\star & \star & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & \star & 5 & \star & \star & \star & & \\
\hline
\star & \star & \star & \star & \star & \star & &
\end{array}$$

Megoldás

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & 7 & 5 \\
\hline
9 & 1 & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & 6 & 5 & 3 & 7 & 0 & & \\
\hline
9 & 8 & 0 & 5 & 5 & 0 & &
\end{array}$$

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a megoldás nem tökéletes, akkor az alábbi részpontszámok adhatók:
Ha a szorzóban az első számjegy 7. (***1** pont*)
Ha a szorzandó 13074. (***1** pont*)
Ha az első részletszorzat 91518. (***1** pont*)
Ha a szorzóban a második számjegy 5. (***2** pont*)
Ha a második részletszorzat 65370. (***1** pont*)
Ha a szorzat 980550. (***1** pont*)

Részletes indoklás, amit a feladat szövege nem kért:
A kétjegyű szám első számjegye csak 7 lehet, hiszen a 4 egyjegyű számú többszörösei közül csak a 8 és a 28 végződik 8-ra, viszont látszik, hogy 2 nem lehet az első számjegy, mert akkor nem lenne tízes átvitel és a 7 alatt 4-nek kellene állnia. Ebből az is következik, hogy a második sor második helyén 1 áll.
Ugyanezt úgy is be lehet látni, hogy mivel az ötjegyű szám harmadik jegye 0, ezért a kétjegyű szám első jegye $518 : 74 = 7$.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\star & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & \mathbf{7} & \star \\
\hline
\star & \mathbf{1} & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & \star & 5 & \star & \star & \star & & \\
\hline
\star & \star & \star & \star & \star & \star & &
\end{array}
$$

A harmadik sorban szereplő 5 csak úgy jöhet ki, ha a kétjegyű szám második jegye 5. Hiszen az 5-öt úgy kapjuk, hogy a kétjegyű szám második jegyét megszorozzuk 3-mal, és hozzáadjuk az előző lépésből kapott maradékot. De maradék nincs, hiszen az előző lépésben 0-t szoroztunk valamivel. A 3 egyjegyű számú többszörösei között pedig a 15 az egyetlen, ami 5-re végződik. Ezek alapján a szorzás eddig megfejthető:

$$
\begin{array}{cccccccc}
\star & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & 7 & \mathbf{5} \\
\hline
\star & 1 & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & \star & 5 & \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & & \\
\hline
\star & \star & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & &
\end{array}
$$

Az eredeti 5-jegyű szám első számjegye csak az 1-es lehet, hiszen egy 20 000-nél nagyobb szám 75-szöröse biztosan 6-jegyű, márpedig a második sorban egy ötjegyű szám látható. Tehát az összeszorzott számok: 13074 és 75.

2. Tamás 7 könyvet vásárolt, amelyeknek az ára 500, 700, 1000, 1400, 2000, 2200 és 4000 Ft volt. A boltban olyan akció volt, hogy 3 könyvből a legolcsóbbat ingyen kapta a vásárló. A bolt a számára legkedvezőbb módon csoportosította a könyveket, azaz ahogy Tamás a legtöbbet fizetné. Tamás azonban reklamált és a számára legkezdvezőbb módon csoportosított, vagyis ahogy a legkevesebbet kell fizetnie. Mennyit spórolt Tamás a reklamációval?

Megoldás
Mivel 7 könyv van, ezért két hármas csoport állítható össze, vagyis két könyvet fog Tamás ingyen megkapni. A bolt akkor jár jól, ha minél olcsóbb könyveket ad ingyen, Tamás pedig akkor, ha minél drágábbakat. (***1** pont*)
A bolt el tudja érni, hogy a két legolcsóbb könyv legyen ingyen, hiszen az egyik csoportba teszi a 4000, 2200 és 500 Ft-os könyvet, a másikba pedig a 2000, 1400 és a 700 Ft-osat. Ekkor az 500 és a 700 Ft-os könyvet kapja Tamás ingyen. (***1** pont*)
Tehát a kifizetett összeg ekkor: $4000 + 2200 + 2000 + 1400 + 1000 = 10600$ forint. (***1** pont*)
Tamás minél drágább könyveket szeretne ingyen megkapni.
A két legdrágább könyvet mindenképpen ki kell fizetnie, hiszen nincs olyan hármas csoport, amelyben ezek egyike lenne a legolcsóbb. (***1** pont*)
Az olcsóbb ingyen kapott könyv ára legfeljebb a hatodik legnagyobb összeg lehet, hiszen a 4 kifizetett összegnek és a drágább ingyenesnek is több az ára. (***1** pont*)
A legkedvezőbb esetben tehát a harmadik és hatodik legdrágább könyv szerezhető meg ingyen.

A kifizetett összeg ekkor: $4000 + 2200 + 1400 + 1000 + 500 = 9100$ forint. (***1** pont*)
Vagyis Tamás $10600 - 9100 = 1500$ forintot tudott spórolni a reklamációval. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

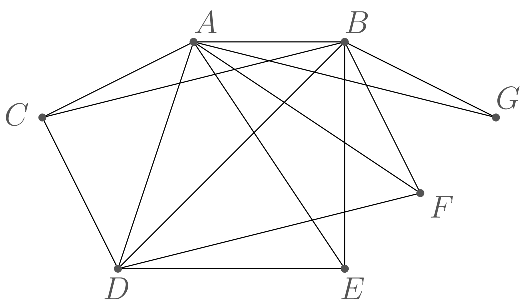
3. Anna, Béla, Cili, Dénes, Edina, Feri és Gábor baráti összejövetelt szerveznek telefonbeszélgetések útján. Ha közülük ketten már beszéltek az ügyben, akkor többé nem hívják egymást. Anna és Béla eddig 6-6 beszélgetést folytatott le. Cili és Dénes beszélgetéseinek száma különböző páratlan szám. Összesen 14 beszélgetés zajlott le.

   (a) Beszélt-e egymással Cili és Dénes?

   (b) Van-e a hét résztvevő között olyan, akinek csak 2 beszélgetése volt?

1. megoldás

Jelöljük A, B, C, D, E, F és G-vel az ilyen kezdőbetűjű emberek beszélgetéseinek a számát.
Mivel összesen 14 beszélgetés zajlott le, és egy beszélgetés pontosan két ember között zajlik, ezért $A + B + C + D + E + F + G = 28$. (***1** pont*)
Mivel $A = 6$, $B = 6$, azaz ők mindenkivel beszéltek, ezért $C, D, E, F, G \geq 2$. (***1** pont*)
C és D különböző páratlan számok. Mivel C és D különböző páratlan számok, mindkettő értéke legalább 2 és legfeljebb 6, ezért C és D értéke valamilyen sorrendben 3 és 5. (***2** pont*)
Tudjuk, hogy $A + B + C + D = 20$, tehát $E + F + G = 8$. A 8 kétféle módon jöhet ki 3 megfelelő egész szám összegeként: $2 + 2 + 4$ vagy $2 + 3 + 3$. Tehát biztosan van olyan ember, akinek csak 2 beszélgetése volt. (***1** pont*)
Mindkét esetben legalább egy ember E, F, G közül nem beszélt senkivel A-n és B-n kívül, ezért csak úgy lehet meg az 5 beszélgetése C-nek vagy D-nek, ha egymással is beszéltek. (***1** pont*)
Az $(A, B, C, D, E, F, G) = (6, 6, 3, 5, 3, 3, 2)$ megvalósítható:



(***1** pont*)
Összesen: 7 pont

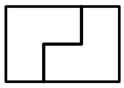
2. megoldás

Jelöljük az embereket a nevük kezdőbetűivel.
Mivel A és B beszélt mindenkivel, ezért tekintsünk el tőlük és az általuk lefolytatott beszélgetésektől. 11 ilyen beszélgetés volt, hiszen ők mindenki mással beszéltek, de egymással is. (***2** pont*)
Az összes beszélgetés darabszáma 14-ről így lecsökken 3-ra, a megmaradt személyek beszélgetéseinek száma pedig rendre 2-vel. (***1** pont*)

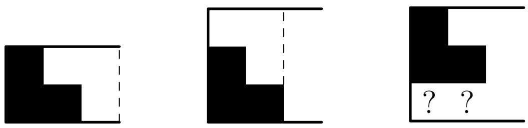
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

C és D beszélgetéseinek a száma továbbra is páratlan marad, hiszen 2-vel csökkent, így csakis 1, illetve 3 lehet. (***1** pont*)
Ha C és D nem beszélt volna egymással, akkor ez 4 beszélgetést jelentene összesen, ami lehetetlen. Tehát C és D beszélt egymással. (***1** pont*)
Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy D beszélt 3 emberrel a megmaradók közül. Mivel C-vel beszélt, ezért E, F és G közül az egyikkel nem. Ez az ember nem beszélt egy emberrel sem a megmaradók közül, viszont beszélt A-val, illetve B-vel, így ő pontosan két emberrel beszélt. (***1** pont*)
Az 1. megoldás végén lévő ábra mutatja, hogy a fentiek meg is valósulhatnak. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

4. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a 2×3-as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb területű téglalap, amely úgy rakható ki ilyen elemekkel, hogy abban semelyik két szereplő elem sem alkot 2×3-as téglalapot? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)

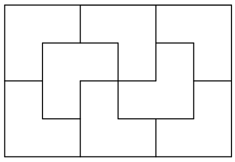


Megoldás
A keletkező téglalap mindkét oldala legalább 4 egység hosszú, mert 2 és 3 egységnyi oldalakkal nem teljesíthető a feltétel.



(***2** pont*)
Az L-alakok három négyzetet fednek, ezért a a keletkező téglalap területe osztható 3-mal. (***1** pont*)
Emiatt legalább az egyik oldalának hossza is osztható 3-mal. (***1** pont*)
A legkisebb lehetséges oldalpár ezért a 4 és 6. (***1** pont*)

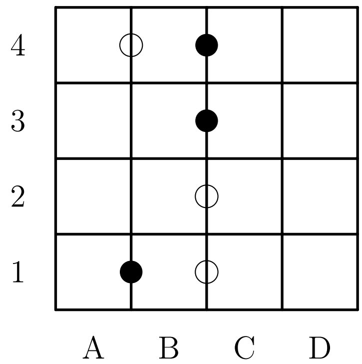
Ilyen oldalú téglalap készíthető is, tehát a minimális terület 24 egység.



(*2 pont*)
Összesen: 7 pont

5. Az ábrán látható 4×4-es táblázatot kell kitöltenünk az 1, 2, 3, 4 számokkal. A szabályok a következők:
(1) Egy adott szám minden sorban és minden oszlopban egyszer szerepel.
(2) Ha két négyzet közös oldalán egy üres karika látható, akkor azokban a négyzetekben szomszédos számok szerepelnek.
(3) Ha két négyzet közös oldalán egy teli karika látható, akkor azokban a négyzetekben két olyan szám szerepel, melyek közül az egyik duplája a másiknak.

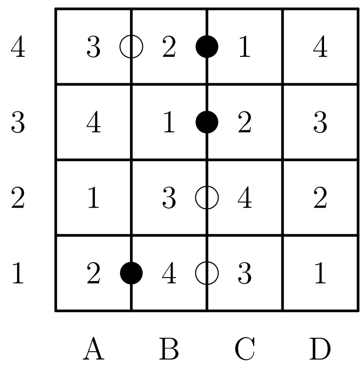
   (a) Mutasd meg, hogy a B2-es mezőben csak 3-as szám állhat!
   (b) Add meg a táblázat egy olyan kitöltését, amely megfelel a fenti szabályoknak!



Megoldás
Egy teli karika két oldalán lévő négyzetekben csak az $(1;2)$, illetve a $(2;4)$ párok szerepelhetnek valamilyen sorrendben. Vagyis egy teli karika melletti mezőn nem állhat 3-as. (*1 pont*)
A B oszlopban 3 ilyen mező van, és egy oszlopban minden szám különböző, tehát ezeken a mezőkön szükségképpen az 1, 2, és 4 számoknak kell állniuk. (*1 pont*)
Emiatt az egyetlen teli karikával nem szomszédos mezőn, B3-on csak 3-as állhat. (*1 pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Az egyetlen jó kitöltés:



(***4*** *pont*)
Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program Emberi Erőforrások Minisztériuma EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

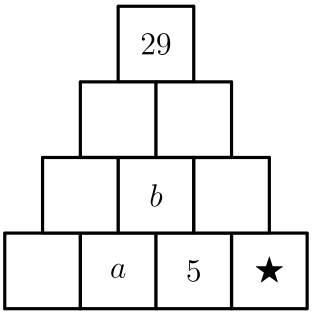
46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

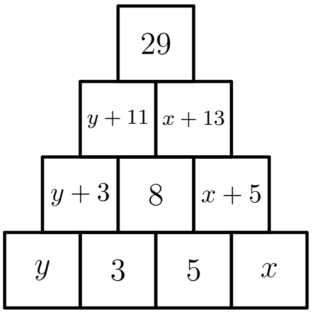
HETEDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Az alábbi ábrán minden négyzetbe pozitív egész számokat írhatunk. Tudjuk, hogy bármely négyzetbe írt szám az alatta lévő két négyzetbe írt szám összege. Illetve azt is tudjuk, hogy $a + b = 11$. Add meg az összes számot, amely a ★-gal jelölt mezőbe kerülhet.



Megoldás
A képzési szabály alapján $a+5 = b$, tehát $a+b = a+a+5 = 11$, amiből $a = 3$ és $b = 8$. (***2** pont*)
A csillag helyére írt számot jelöljük x-szel, az a-tól balra lévőt y-nal és töltsük ki az üres mezőket az összeadási szabály szerint.



(***2** pont*)

Így a legfelső mezőre az $y + 11 + x + 13 = 29$ feltételt kapjuk, ahonnan $x + y = 5$. (***1** pont*)
Mivel pozitív egészekről van szó, x lehetséges értékei 1, 2, 3 és 4. Mindegyik megvalósítható az $y = 5 - x$ választással. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

2. Egy hatjegyű telefonszámot nevezzünk szerencsésnek, ha az első 3 jegyének összege egyenlő az utolsó három jegyének összegével, és szerencsétlennek, ha az előbbi feltétel nem teljesül.

Növekvő sorrendben leírjuk a telefonszámokat. Ebben a sorban legfeljebb hány egymást követő szerencsétlen szám van? (Telefonszámon a 000000-tól 999999-ig terjedő számhatosokat értjük.)

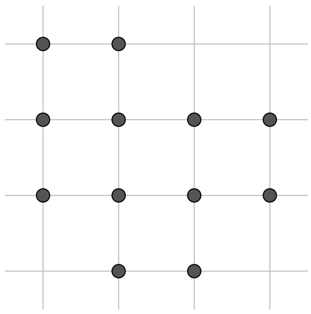
Megoldás
1000 egymást követő szerencsétlen szám megadható, például:

$$000001, 000002, 000003, \dots, 000999, 001000.$$

(***2** pont*)
A $000000, 001001, 002002, \dots, 998998, 999999$ sorozatban viszont minden szám szerencsés, hiszen az első 3 jegy megegyezik az utolsó hárommal. (***2** pont*)
A fenti sorozatban minden 1001-edik telefonszám szerepel (éppen az 1001-gyel oszthatóak). Ezért bármely 1001 szomszédos telefonszám között van olyan, amelyik tagja a sorozatnak, tehát szerencsés. Így legfeljebb 1000 szomszédos szerencsétlen szám adható meg. (***3** pont*)
Összesen: 7 pont

3. Egy négyzethálós lapon megjelöltünk 12 rácspontot az itt látható ábra szerint.

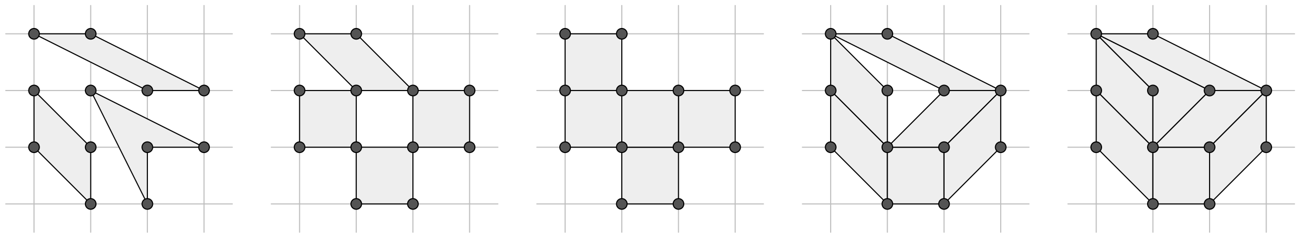
   Szép négyszögnek nevezzük azokat a négyszöglapokat, amelyeknek mind a négy csúcsa a fenti 12 pont közül való, és területük megegyezik az egységoldalú négyzet területével. (Nem tekintjük négyszögnek azokat az alakzatokat, amelyeknek 3 csúcsa egy egyenesre illeszkedik.)



Anna egymás után, pirossal beszínezett az ábrán néhány szép négyszöget. Mindig olyat választott ki következőnek, amelynek pontjai a határvonalát kivéve még színezetlenek voltak. Amikor megunta a színezgetést, a 12 rácspont mindegyike legalább egy pirosra színezett szép négyszög csúcsa volt.
Hány szép négyszöget színezhetett be Anna? Adj példát minden lehetőségre és indokold, hogy miért nem lehet ezektől eltérő a beszínezett szép négyszögek száma!

Megoldás
Legalább 3 szép négyszöget be kellett színeznie, mert különben lenne olyan rácspont, amely nem lenne csúcsa egyik színezett négyszögnek sem. (***1** pont*)
Lehetséges, hogy a beszínezett szép négyszögek száma 3, 4, 5, 6 vagy 7 volt, ezekre 1-1 példát mutatnak az alábbi ábrák:

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



($\boldsymbol{5} \times \boldsymbol{1} = \boldsymbol{5}$ *pont*)

Az utolsó ábrán látható négyszögek egyesítésével kapott hétszög a 12 pont által meghatározott négyszögek mindegyikét lefedi. Mivel ennek a hétszögnek a területe $9 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$ egység, és Anna minden lépésben 1 egységnyi területet színez be, ezért nem színezhetett be 7-nél több szép négyszöget. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

4. A következő összeadásban minden betű egy számjegyet jelöl. Azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket.

$$\textbf{FOUR} + \textbf{FIVE} = \textbf{NINE}.$$

Hány különböző megoldás van? (Két megoldás különböző, ha van legalább egy olyan betű, amely eltérő számjegyet jelöl bennük.)

Megoldás

Az $R + E$ összeg E-re végződik, ezért $R = 0$. Emiatt a százas helyiértéken az $O + I$ összeg már nem végződhet I-re, tehát itt van átvitel, és így az $O + I + 1$ összeg végződik I-re, amiből $O = 9$. (***1** pont*)

A fentiek alapján az egyesek helyén nem keletkezett átvitel, a tízeseknél és a százasoknál viszont igen. Ezért $U + V = 10 + N$ és $F + F + 1 = N$. (***1** pont*)

N tehát páratlan, ugyanakkor $N = F + F + 1 \geq 1 + 1 + 1 = 3$ és $N = U + V - 10 \leq 8 + 7 - 10 = 5$. Tehát $N = 3$ vagy $N = 5$. (***2** pont*)

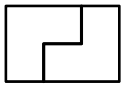
Ha $N = 3$, akkor $F = 1$ és $U + V = 13$. A fennmaradó számjegyek alapján az (U, V) párra 4 lehetőség van: $(8, 5), (7, 6), (6, 7), (5, 8)$. (***1** pont*)

Ha $N = 5$, akkor $F = 2$ és $U + V = 15$. A fennmaradó számjegyek alapján az (U, V) párra 2 lehetőség van: $(8, 7), (7, 8)$. (***1** pont*)

Ez összesen 6 lehetőség az R, O, N, F, U, V számjegyek megválasztására. Az (E, I) számpárt a még nem használt számjegyek közül szabadon választhatjuk. Így $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ különböző megoldás van. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

5. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a 2×3-as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb **páratlan** területű téglalap, amely kirakható ilyen elemekkel? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)



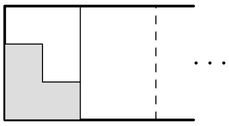
Megoldás

A terület csak úgy lehet páratlan, ha mindkét oldal hossza páratlan. (***1** pont*)

Minden L-alakzat 3 egységnyi területet fed le, így a téglalap területének 3-mal oszthatónak kell lennie. Ezért legalább az egyik oldalhossz 3-mal osztható. (***1** pont*)

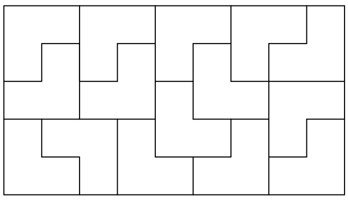
Egy 3 egység hosszúságú oldal mentén a két sarokmezőt különböző L-alakzatok tudják csak lefedni, de ezek csak úgy helyezhetők el, hogy egy 3×2-es téglalapot alkotnak. (***1** pont*)

A fennmaradó téglalapra ezt a gondolatot megismételve újabb 3×2-es téglalapot kapunk, és így tovább, míg végül az egész téglalapot lefedjük 3×2-es téglalapokkal. Ez viszont csak akkor lenne lehetséges, ha az oldalhossza páros lenne. (***1** pont*)



Tehát a 3-mal osztható hosszúságú oldal hossza legalább 9 egység, míg a másik oldal hossza legalább 5 egység, így a terület legalább 45 egység. (***1** pont*)

Ez meg is valósítható az 5×9-es téglalap kirakásával, például az alábbi módon:



(***2** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

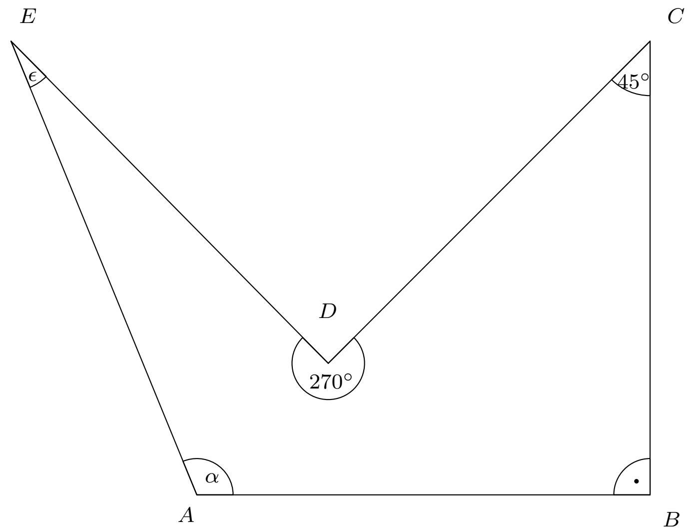
Megyei forduló

NYOLCADIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Az $ABCDE$ ötszögre teljesül, hogy $AB = BC = CD = DE$, a B-nél lévő szög derékszög, a C-nél lévő szög $45°$, a D-nél lévő szög pedig $270°$. Mekkorák az ötszög A és E csúcsánál lévő szögei?

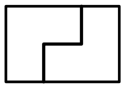
Megoldás Készítsünk először is egy, a feltételeknek eleget tévő ábrát:



(*1 pont*)
Az ABC háromszög egyenlő szárú, melynek szárszöge $90°$, így $ACB\sphericalangle = 45°$. (*1 pont*)
Mivel $DCB\sphericalangle = 45°$ a feladat feltételei szerint, így az A, D és C pontok egy egyenesre esnek. (*1 pont*)
Mivel az EDC háromszög egyenlő szárú, melynek szárszöge $90°$, így $ECD\sphericalangle = 45°$. (*1 pont*)
$CE = CA$, hiszen a CDE és az ABC háromszögek egybevágók (két oldaluk és a köztük lévő szög megegyezik), (*1 pont*)
amiből kapjuk, hogy $CAE\sphericalangle = CEA\sphericalangle = 67,5°$. (*1 pont*)
Így végül adódik, hogy az A csúcsnál lévő szög, $\alpha = 45°+67,5° = 112,5°$, illetve $\epsilon = 67,5°-45° = 22,5°$, hiszen az $DEC\sphericalangle = 45°$ is teljesül. (*1 pont*)

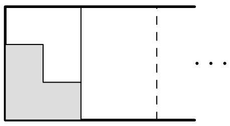
(A feladat befejezésénél hivatkozhatunk arra a jól ismert tényre is, hogy az ötszögek szögeinek összege $3 \cdot 180° = 540°$).
Összesen: 7 pont

2. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a 2×3-as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb **páratlan** területű téglalap, amely kirakható ilyen elemekkel? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)

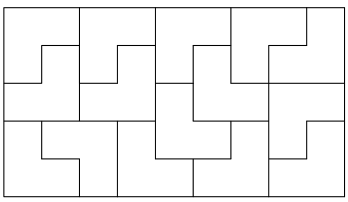


Megoldás

A terület csak úgy lehet páratlan, ha mindkét oldal hossza páratlan. (*1 pont*)
Minden L-alakzat 3 egységnyi területet fed le, így a téglalap területének 3-mal oszthatónak kell lennie. Ezért legalább az egyik oldalhossz hárommal osztható. (*1 pont*)
Egy 3 egység hosszúságú oldal mentén a két sarokmezőt különböző L-alakzatok tudják csak lefedni, de ezek csak úgy helyezhetők el, hogy egy 3×2-es téglalapot alkotnak. (*1 pont*)
A fennmaradó téglalapra ezt a gondolatot megismételve újabb 3×2-es téglalapot kapunk, és így tovább, míg végül az egész téglalapot lefedjük 3×2-es téglalapokkal. Ez viszont csak akkor lenne lehetséges, ha az oldalhossza páros lenne. (*1 pont*)

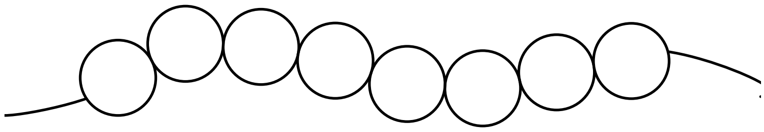


Tehát a 3-mal osztható hosszúságú oldal hossza legalább 9 egység, míg a másik oldal hossza legalább 5 egység, így a terület legalább 45 egység. (*1 pont*)
Ez meg is valósítható az 5×9-es téglalap kirakásával, például az alábbi módon:



(*2 pont*)
Összesen: 7 pont

3. Hány olyan 8 gyöngyből álló gyöngysort lehet összeállítani, ahol minden gyöngy kék, piros, vagy zöld, a szomszédosak különböző színűek, az első és az utolsó gyöngy színe pedig megegyezik? (Két gyöngysor különböző, ha balról jobbra haladva van olyan pozíció, ahol különböző színű gyöngyöket tartalmaznak.)



1. megoldás
Kezdjük el felépíteni a gyöngysort balról. Tegyük fel, hogy kékkel indítunk. A betűk jelzik, hogy milyen színű az éppen aktuális gyöngy, a számok pedig azt, hogy az éppen aktuális gyöngyig hányféle gyöngysor volt felépíthető:

$$K(1) \to K(0), P(1), Z(1) \to K(2), P(1), Z(1) \to K(2), P(3), Z(3) \longrightarrow K(6), P(5), Z(5) \to$$
$$\to K(10), P(11), Z(11) \to K(22), P(21), Z(21) \to K(42)$$

(***4** pont*)

A rekurzió szabálya a második lépéstől kezdve következő volt:

$$K(k), P(p), Z(z) \to K(p+z), P(k+z), Z(k+p),$$

hiszen ha például kék gyönggyel szeretnénk folytatni a sort, akkor előtte a sor piros vagy zöld gyönggyel végződött. (***2** pont*)
Így a feladat kérdésére a válasz $3 \cdot 42 = 126$. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás (Az előző megoldás kissé módosított változata.)
Jelölje $a(n)$ azt, hogy hány olyan n gyöngyből álló gyöngysor van, melyben az első és az utolsó gyöngy azonos színű, $b(n)$ pedig azt, hogy hány olyan n gyöngyből álló gyöngysor van, melyben az első és az utolsó gyöngy különböző színű. Nyilván $a(1) = 3$ és $b(1) = 0$. Vegyük észre, hogy $a(n+1) = b(n)$. Valóban, ha az első és utolsó gyöngy színe azonos, akkor az első és az utolsó előtti gyöngy színe különböző, és egy ilyen elrendezést egyértelmű befejezni. (***2** pont*)
Hasonlóan, $b(n+1) = 2a(n) + b(n)$ is teljesül, hiszen ha az első n gyöngyből álló sorban ugyanaz az első és az n. gyöngy színe, akkor kétféle módon lehet befejezni ezt a sort, ha pedig különböző, akkor egyféle módon. (***2** pont*)
Ezután egyszerű számolással $a(2) = 0$, $b(2) = 6$, $a(3) = 6$, $b(3) = 6$, $a(4) = 6$, $b(4) = 18$, $a(5) = 18$, $b(5) = 30$, $a(6) = 30$, $b(6) = 66$, $a(7) = 66$, $b(7) = 126$, $a(8) = 126$. (***2** pont*)
Tehát a feladat kérdésére a válasz 126. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

3. megoldás
Tegyük fel, hogy az első (és így az utolsó) gyöngyszem kék. Megszámoljuk az ilyen eseteket, majd szorzunk hárommal, mert piros és zöld is lehet az első gyöngy. (***1** pont*)
Felsoroljuk, hogy hol lehet még kék gyöngy a sorban (a kék gyöngyszemek száma szerint csoportosítva az eseteket).

- `K.K.K..K`
- `K..K.K.K`
- `K.K..K.K`
- `K.K....K`
- `K..K...K`
- `K...K..K`
- `K....K.K`
- `K......K`

(***3** pont*)
Minden pontozott „szakasz” (két kék gyöngy közötti rész) kétféle lehet, mert a kezdő szín eldöntése után váltogatni kell a színeket. Tehát ha k „szakasz” van, akkor 2^k a színezések száma az adott esetben. Így összesen $3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 = 24 + 16 + 2 = 42$ eset van, amikor kékkel kezdünk. (***2** pont*)
Tehát a lehetőségek száma $3 \cdot 42 = 126$. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

4. megoldás
Írjuk fel egy körvonalra a piros, kék és zöld színeket. Egy jó gyöngysornak megfelel egy lépéssorozat a körvonalon, ahol minden lépésben az óramutató járásával megegyező vagy ellenkező irányban lépünk, és a végén ugyanoda lyukadunk ki, ahonnan indultunk. (***2** pont*)
Ez azzal egyenértékú, hogy az óramutató járásával megegyező és ellentétes lépések hármas maradéka megegyezik. Mivel összesen 7-et lépünk, így a lehetőségek: 5 lépés az óramutató járásával megegyező irányban, 2 ellentétesen, illetve ez az eset a megegyező és ellentétes szavakat felcserélve. (***2** pont*)
Mivel bármely színről indulhatunk, a válasz: $3(7 \cdot 6/2 + 7 \cdot 6/2)$, (***2** pont*)
ami 126. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A helyes eredmény közlése indoklás nélkül **3 pontot** ér.

4. Egy téglatest minden élének hosszúsága egyjegyű pozitív egész szám. Minden lapra ráírtuk a területét. A lapokon lévő számok reciprokait összeadva az eredmény $\frac{2}{7}$. Mekkorák a téglatest élei?

Megoldás Jelölje a téglatest éleit x, y, z. Így a feltételt kifejezhetjük az alábbi módon:

$$\frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx} = \frac{2}{7},$$

ahonnan rendezés után adódik, hogy

$$7(x + y + z) = xyz.$$

(***2*** *pont*)

A bal oldal oszható 7-tel, így a jobb oldal is. De mivel az élek hosszúsága egyjegyű egész szám, a 7 pedig prím, így valamelyik élhossznak 7-nek kell lennie. (***2*** *pont*)

Legyen ez mondjuk a z. Így az alábbi egyenlethez jutunk:

$$x + y + 7 = xy,$$

ami szorzattá alakítással az alábbi alakra hozhatunk:

$$(x - 1)(y - 1) = 8.$$

(***2*** *pont*)

Tegyük fel, $x \geq y$, azaz az első tényező legalább akkora, mint a második. Figyelembe véve, hogy a bal oldal tényezői nemnegatívak, így a lehetséges felbontások:

$$8 \cdot 1; \quad 4 \cdot 2$$

ahonnan rögtön adódnak a megoldások: $(9; 2; 7)$ és $(5; 3; 7)$. (***1*** *pont*)

Természetesen ezek bármely más sorrendje is jó megoldás, hiszen a $z = 7$, illetve $x \geq y$ feltételek önkényesek voltak, az ismeretlenek szerepe pedig szimmetrikus. **Összesen: 7 pont**

Megjegyzés: Mivel egyjegyű pozitív egész számokról van szó a feladatban, az $x + y + 7 = xy$ egyenlet próbálgatással is megoldható, természetesen az ilyen megoldásokért is maximális pontszám jár.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Tamás 9 könyvet vásárolt, amelyeknek az ára csupa különböző 2-hatvány volt. A boltban olyan akció volt, hogy bármely 3 könyvből a legolcsóbbat ingyen kapta a vásárló. Hány különböző áron kaphatja meg Tamás a 9 könyvet? (A végösszeget ne kerekítsük.)

Megoldás
Bármilyen módon végzik is el a könyvek csoportosítását, a legolcsóbb könyvet ingyen kapja meg Tamás, míg a két legdrágábbat ki kell fizetnie. (***1** pont*)
Helyezzük el a könyveket egy sorban áraik szerint növekvő rendben, balról kezdve a legolcsóbbal. Jelöljük meg azokat a könyveket, melyeket Tamás ingyen kaphat. Az alábbiakban felsoroljuk a lehetséges eseteket (1 jelöli az ingyenes könyveket):

- 1aa1bb1cc
- 1a1abb1cc
- 11aabb1cc
- 1aa1b1bcc
- 1a1ab1bcc
- 11aab1bcc
- 1aa11bbcc
- 1a1a1bbcc
- 11aa1bbcc
- 1a11abbcc
- 11a1abbcc
- 111aabbcc

A kitöltés logikája: minden 1-estől jobbra legyen két nem ingyenes könyv, mely csakis hozzá tartozik, ezeket jelölik az a, b és c betűk. (***1** pont*)
Az előző felsorolásban nem szereplő esetből csak három van, és ezekben a legolcsóbb és a második legolcsóbb ingyenes könyv között legalább három nem ingyenes könyv van, ami lehetetlen. (***2** pont*)
Már csak azt kell megvizsgálni, hogy az ingyen kapott könyvek összára hány esetben különbözik. Mivel a legolcsóbb minden esetben ingyenes, így a másik kettő ára a lényeges, foglalkozzunk csak azokkal. Ha két olyan csoportosítást nézünk, melyben az egyik ingyenes könyv közös, akkor a másik ingyenes könyv nem az, így ekkor más-más árat jelent a két csoportosítás. (***1** pont*)
Ezek után tekintsünk két olyan csoportosítást, melyben a két-két ingyenes könyv más-más. Most használjuk ki azt, hogy a könyvek árai különböző 2-hatványok. Legyenek az egyik csoportosításban szereplő ingyenes könyvek árai $2^x, 2^y$, a másikban pedig $2^z, 2^u$. Tegyük fel, hogy közülük 2^u a legnagyobb. Ekkor:

$$2^u = 2^{u-1} + 2^{u-1} > 2^x + 2^y,$$

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

felhasználva, hogy x és y különbözőek, és legfeljebb $u-1$-gyel egyenlők. Ez azt jelenti, hogy ekkor is különböző árat fizettünk a három-három könyvért. Beláttuk hát, hogy a felsorolt 12 csoportosítás mindegyikében más-más az ingyenes könyvek ára, vagyis a kifizetendő könyvek ára is egyben. (***2** pont*)

A válasz tehát: 12. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Annak igazolásánál, hogy különböző kiválasztásoknál más és más árat fizetünk a kilenc könyvért, arra is lehet hivatkozni, hogy a kettes számrendszerben más és más módon felírt számok értéke más és más lesz.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.