TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu, www.telc.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900 Fax: 327-8901.
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

Minden állításodat bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény puszta közlése, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*".

1. Van egy piros és egy zöld korongunk. Mindkét korong mindkét oldalán van egy-egy pozitív egész szám, a piros korong egyik oldalán a 2000, a zöld korong egyik oldalán a 18 található. A korongokat az összes lehetséges módon az asztallapra helyezve a korongon látható számok összegére pontosan négyféle különböző eredményt kaphatunk, és ezek ráadásul egymást követő pozitív egész számok.

   Milyen számok állhatnak a korongok túlsó oldalán? Az összes lehetséges megoldást keresd meg!

2. Az $ABCD$ négyzet átlóinak metszéspontja O, az AB oldal A-hoz legközelebb eső negyedelőpontja N, az AD oldal egy belső pontja P. Az OP egyenes a DN szakaszt az X, a BC oldalt az Y pontban metszi.

   Lehetséges-e, hogy a $XYCD$ négyszög területe éppen háromszorosa az $ANXP$ négyszög területének?

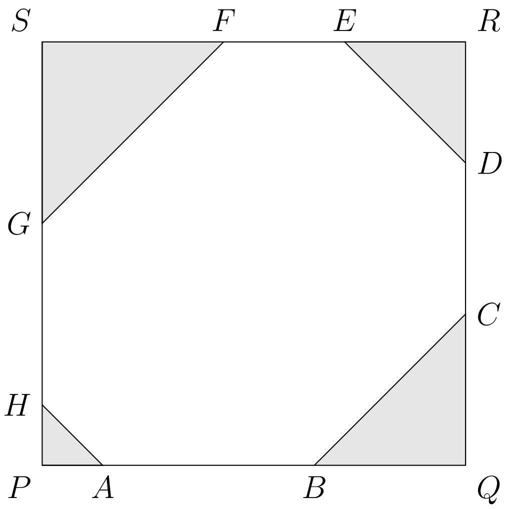
3. Melyek azok az n pozitív egész számok, melyekre $\dfrac{n}{555-n}$ négyzetszám?

FOLYTATÁS A TÚLOLDALON!

4. Anna és Roland a következő játékot játsszák. Roland beírja egy $n \times n$-es táblázat mezőibe a számokat 1-től n^2-ig valamilyen elrendezésben. Annának a táblázat bal felső sarkából indulva el kell jutnia a táblázat jobb alsó sarkáig úgy, hogy mindig élszomszédos mezőre lép, és olyan mezőre nem léphet, ahol korábban már járt. Célja, hogy az út során érintett mezőkben szerepelő számok összege a lehető legnagyobb legyen. Roland úgy próbálja kezdetben kitölteni a táblázatot, hogy az Anna által elérhető összeg a lehető legkisebb legyen.

   Határozzuk meg minden $n > 1$ esetén az Anna által elérhető legnagyobb összeget! (Feltételezzük, hogy Anna és Roland is optimálisan játszik.)

5. A $PQRS$ négyzetből a sarkainál levágtuk a PAH, QCB, RED, SGF egyenlő szárú háromszögeket az ábra szerint, így egy nyolcszöget kaptunk. Bizonyítsd be, hogy az $ACEG$ és a $BDFH$ négyszög területe egyenlő.



Budapest, 2018. május 25.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TMV-17-0114. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.