TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu, www.telc.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900 Fax: 327-8901.
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

HETEDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Tekintsük azokat a hatjegyű számokat, amelyekben nincs 0 számjegy, és minden számjegyük osztható azzal a számmal, ahányadik helyen áll. (Balról jobbra olvasva, tehát az egyesek helyén álló számjegy a hatodik.)

   (a) Összesen hány ilyen hatjegyű szám van?

   (b) Ezek között hány olyan van, amelyben nincs két egyforma számjegy?

   Megoldás

   Az első számjegy 9-féle $(1, 2, \ldots, 9)$, a második 4-féle $(2, 4, 6, 8)$, a harmadik 3-féle $(3, 6, 9)$, a negyedik 2-féle $(4, 8)$, az ötödik 1-féle (5) és a hatodik szintén 1-féle értéket (6) vehet fel. (***2** pont*)
   Így összesen $9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{216}$ szám van, ami teljesíti a feltételeket. (***1** pont*)
   Tegyük fel, hogy nincs két egyforma számjegy. A hatodik jegy továbbra is 6-os, az ötödik 5-ös, a negyedik számjegy lehet 4 vagy 8. A harmadik számjegy már csak 3 vagy 9 lehet, hiszen a 6-os biztosan szerepel már a hatodik helyen. (***1** pont*)
   A második számjegy nem lehet 6-os és nem lehet ugyanaz, mint a negyedik. Ezért itt csak két lehetőség van. (***1** pont*)
   Az első számjegy bármelyik lehet, amely nem egyezik meg a többi öt helyen szereplővel. Itt tehát 4 lehetőség van. (***1** pont*)
   Összesen tehát $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = \mathbf{32}$ megfelelő szám van. (***1** pont*)
   Összesen: 7 pont

2. Vegyük az egész számokat 1001-től 2000-ig, és mindegyiknek keressük meg a legnagyobb páratlan osztóját. Mennyi az így kapott 1000 darab szám összege?

   1. megoldás

   Páratlan számok esetén a legnagyobb páratlan osztó maga a szám: 1001, 1003, …, 1999. (***1** pont*)
   A páros számok (1002, 1004, … 2000) legnagyobb páratlan osztója nem változik, ha megfelezzük őket: elég az 501, 502, …, 1000 számok legnagyobb páratlan osztóját megkeresni. (***1** pont*)
   Itt megint elkülöníthetjük a páratlanokat: 501, 503, … 999; a párosakat pedig megfelezhetjük: 251, 252, …, 500. (***1** pont*)
   Ezt az eljárást folytatva:

	Páratlanok	Párosak megfelezve
1. lépés	$1001, 1003, \ldots, 1999$	$501, 502, \ldots, 1000$
2. lépés	$501, 503, \ldots 999$	$251, 252, \ldots, 500$
3. lépés	$251, 252, \ldots, 499$	$126, 127, \ldots 250$
4. lépés	$127, 129, \ldots, 249$	$63, 64, \ldots 125$
5. lépés	$63, 65, \ldots, 125$	$32, 33, \ldots, 62$
6. lépés	$33, 35, \ldots, 61$	$16, 17, \ldots 31$
7. lépés	$17, 19, \ldots, 31$	$8, 9, \ldots 15$
8. lépés	9, 11, 13, 15	4, 5, 6, 7
9. lépés	5, 7	2, 3
10. lépés	3	1
11. lépés	1	

(***3** pont*)

Látható, hogy bal oldalt minden 1 és 1999 közötti páratlan számot megkaptunk pontosan egyszer, tehát a keresett összeg $1 + 3 + 5 + \cdots + 1999 = \frac{1+1999}{2} \cdot 1000 = \mathbf{1000000}$. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

Ha két számnak azonos a legnagyobb páratlan osztója, akkor a prímtényezős felbontásuk csak a 2 kitevőjében különbözhet, azaz egyik a másiknak 2-hatványszorosa. (***2** pont*)
Az $1001, 1002, \ldots 2000$ számok között nincs két különböző szám, amelyek 2-hatványszorosai egymásnak, hiszen a legkisebb szám kétszerese is nagyobb a legnagyobb számnál. (***2** pont*)
Ezért az $1001, 1002, \ldots 2000$ számok legnagyobb páratlan osztói mind különböző pozitív páratlan számok, amelyek kisebbek 2000-nél. Mivel ilyen páratlan számból éppen 1000 darab van, ezért mindegyik 2000-nél kisebb pozitív páratlan szám pontosan egy számnak a legnagyobb páratlan osztója. (***2** pont*)
Tehát a keresett összeg $1 + 3 + 5 + \cdots + 1999 = \frac{1+1999}{2} \cdot 1000 = \mathbf{1000000}$. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

3. Sára a következő játékot találta ki. Egy füzetlap első sorába felírt egy pozitív egészekből álló számsort. Ezután a következő sorba az előző sor minden száma helyett leírta növekvő sorrendben 1-től az adott számig az összes pozitív egészt. Majd ugyanezzel a módszerrel képezte a második sor számaiból a harmadik sor számait, és így tovább. Ha például az egyik sorban az

$$5, 1, 2, 3, 2$$

számsor szerepel, akkor a következő sorba az

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2$$

számsort írta.
Hány számot írt Sára a 6. sorba, ha az első sorba az 1, 2, 3, 4, 5 számsort írta?

Megoldás

Az alábbi táblázatban az egyes sorokban lévő számok darabszámát foglaltuk össze. A kitöltési szabály a következő: a 2. sortól kezdve a k-adik cellába az előtte lévő sorban lévő, a k-nál nem kisebb sorszámú cellák összegét írjuk. (***2** pont*)

	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös
1. sor	1	1	1	1	1
2. sor	5	4	3	2	1
3. sor	15	10	6	3	1
4. sor	35	20	10	4	1
5. sor	70	35	15	5	1
6. sor	126	56	21	6	1

(***4** pont*)

Sára tehát a 6 sorba $126 + 56 + 21 + 6 + 1 = \mathbf{210}$ számot írt. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

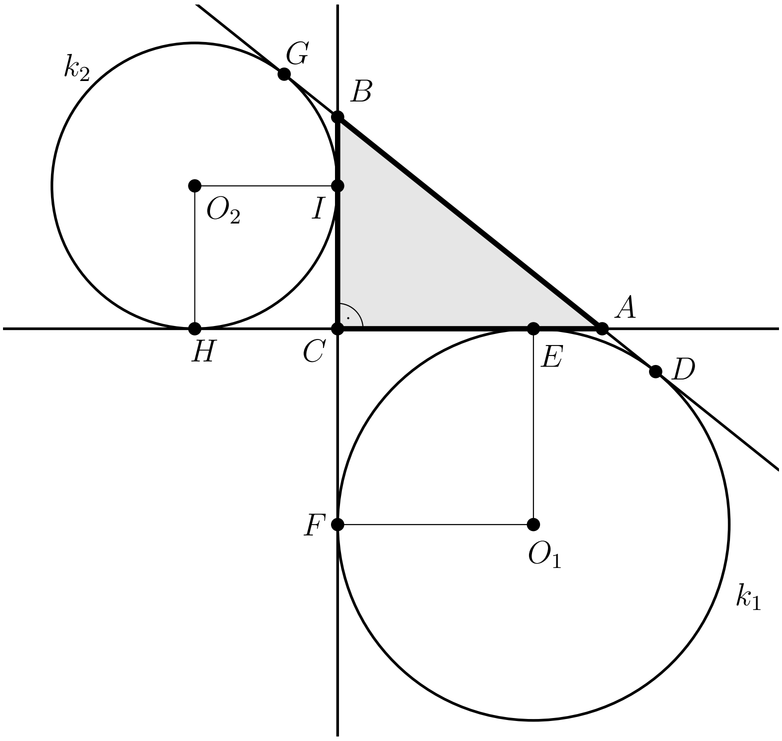
4. Az ABC háromszögben C-nél derékszög van. A k_1 és k_2 *hozzáírt körök* a háromszögön kívül helyezkednek el, az alábbiak szerint:

   - Az O_1 középpontú k_1 kör érinti az AC befogót az E pontban, az AB oldal meghosszabbítását a D pontban, valamint a BC oldal meghosszabbítását az F pontban.
   - Az O_2 középpontú k_2 kör érinti a BC befogót az I pontban, az AB oldal meghosszabbítását a G pontban, valamint az AC oldal meghosszabbítását az H pontban.

   Bizonyítsd be, hogy a k_1 és k_2 körök sugarának összege megegyezik az AB szakasz hosszával.

   Megoldás

   Tekintsük a feltételeknek megfelelő ábrát.



(***1*** *pont*)

Az O_1ECF négyszög minden szöge derékszög (az érintők merőlegesek az érintési pontba húzott sugárra) és a szomszédos O_1E és O_1F oldalai egyenlőek, tehát O_1ECF négyzet, így $r_1 = CE = CF$. Hasonlóan adódik, hogy O_2HCI is négyzet, így $r_2 = CI = CH$. (***1*** *pont*)

Az AG és az AH érintőszakaszok egyenlők, így

$$AG = AH = AE + EC + CH = AE + r_1 + r_2.$$

Ugyanígy a BD és BF érintőszakaszok is egyenlők, így

$$BD = BF = BI + IC + CF = BI + r_2 + r_1.$$

(***2*** *pont*)

Ugyancsak érintőszakaszok egyenlősége miatt $AD = AE$ és $BG = BI$. (***1*** *pont*)

Így

$$AB = AG - BG = AE + r_1 + r_2 - BI$$

és

$$AB = BD - AD = BI + r_1 + r_2 - AE.$$

(***1*** *pont*)

Emiatt $AE - BI = BI - AE$, tehát $AE = BI$. Ebből viszont $AB = r_1 + r_2$ következik, és éppen ezt kellett belátni. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TMV-17-0114. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.