TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Piros, sárga, kék, narancs, fehér és zöld korongjaink vannak egy sorban, mindegyik színből egy darab. A következőket tudjuk:

   (1) A zöld korong nem a jobb szélén van.

   (2) A piros korong két másik korong között található.

   (3) A fehér korong közvetlenül a narancstól balra van.

   (4) A sárga korong a piros és a fehér között helyezkedik el, de egyiknek sem szomszédja.

   Milyen sorrendben helyezkedhetnek el a korongok?

   Megoldás

   A negyedik állítás miatt a sárga korong a középső kettő valamelyike, a piros és a fehér pedig biztosan nem. Ha a sárgától balra helyezkedne el a piros korong, akkor a második állítás miatt a pirosnak kellene a második, a sárgának a negyedik, a fehérnek pedig a hatodik helyen állnia. De ez a harmadik állítás miatt nem lehetséges, hiszen a fehér nem állhat a jobb szélen.

   Tehát a sárgától jobbra helyezkedik el a piros korong. Ez a második és a negyedik állítás miatt csak úgy lehetséges, hogy a fehér az első korong, a sárga a harmadik korong és a piros pedig az ötödik. A harmadik állítás miatt ekkor a második korong a narancs színű. Végül mivel a zöld nem állhat a jobb szélen, a zöld az negyedik korong és a kék a hatodik.

   Tehát a helyes sorrend: fehér, narancs, sárga, zöld, piros, kék.

2. Ossz fel 12 centiméter kerületű téglalapokra

   (a) egy olyan téglalapot, amelynek szomszédos oldalai 6 cm és 7 cm hosszúak;

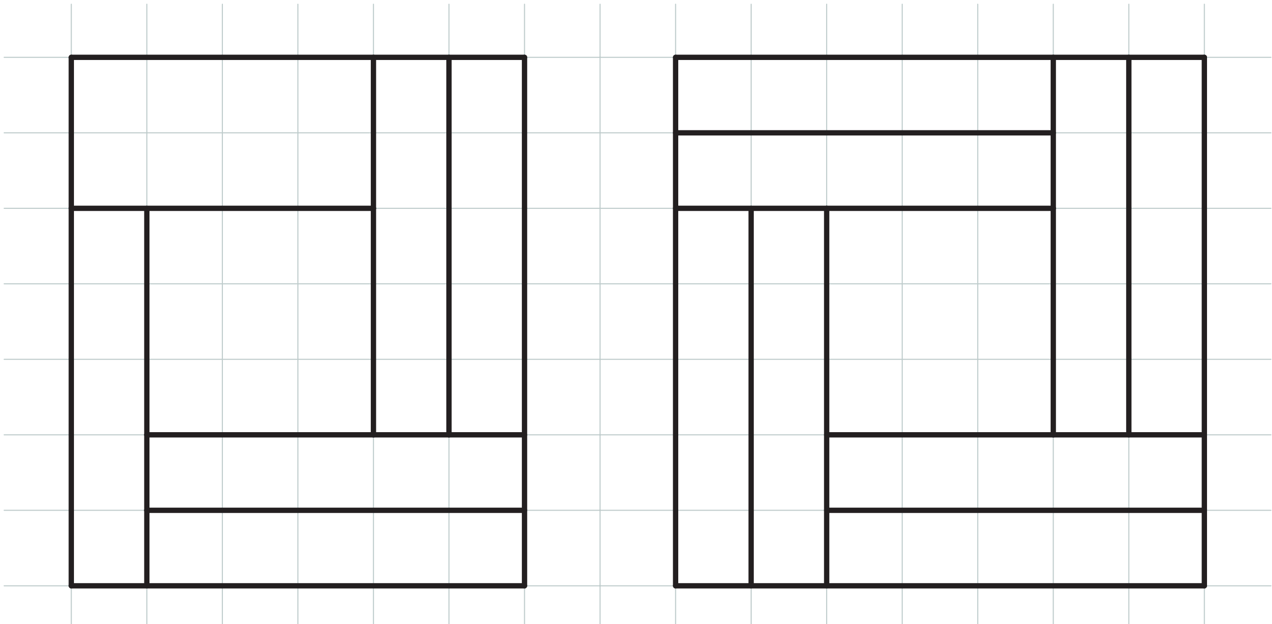
   (b) egy 7 cm oldalhosszúságú négyzetet!

   Elég egy-egy jó felosztást megadni, nincs szükség indoklásra. Ábráidon egyértelműen add meg valamennyi téglalap oldalainak hosszát!

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás

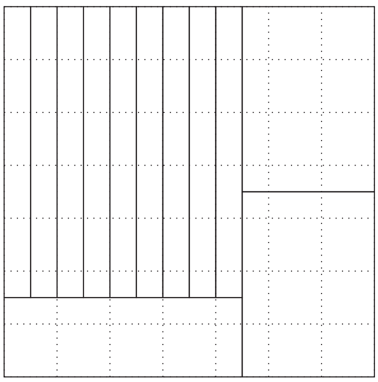
Mivel a téglalap oldali egész oldal hosszúságúak, érdemes egész oldalhosszúságú téglalapokkal próbálkozni. Két szomszédos oldal összesen 6 hosszúságú, így három megfelelő van: az 1×5-ös, a 2×4-es és a 3×3-as. Egy lehetséges megoldás ilyen téglalapokkal:



Az (a) feladatra adott helyes konstrukció **3 pontot**, a (b)-re adott **4 pontot** ér.

Megjegyzés

A (b) kérdésre egy olyan megoldás, ahol az oldalak hossza nem egész szám:



3. Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amely pontosan kétféle számjegyet tartalmaz?

1. Megoldás

Két esetet vizsgálunk aszerint, hogy szerepel-e a jegyek között a nulla.

Első eset: A szám az a, b nem nulla számjegyeket tartalmazza. Ekkor a következő számok a megfelelőek: $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{aab}$, $\overline{bba}$, $\overline{aba}$, $\overline{bab}$, $\overline{abb}$, $\overline{baa}$. Tehát minden a, b különböző nem nulla számokhoz 8 megfelelő szám létezik. Mivel a-t és b-t tetszőlegesen megválaszthatjuk, de különbözőek, $\frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 8 = 288$ megfelelő számot találtunk.

Második eset: A szám az $a, 0$ számjegyeket tartalmazza. Ekkor a következő számok a megfelelőek: a0, a00, aa0, a0a. Tehát $4 \cdot 9 = 36$ ilyen szám van.

Tehát összesen 288+36=324 megfelelő szám létezik.

2. Megoldás

Olyan számból, mely kisebb 1000-nél és pontosan 1 féle számjegyet tartalmaz összesen 9+9+9=27 van. Olyanból mely pontosan háromfélét tartalmaz pedig $9 \cdot 9 \cdot 8$, mivel az első bármilyen nem nulla jegy lehet, a második csak az első nem lehet, a harmadik pedig csak az első kettő nem.

Így összesen $999 - 3 \cdot 9 - 9 \cdot 9 \cdot 8 = 324$ megfelelő szám létezik.

4. Anna és Benő két hatoldalú dobókockával játszanak. A kockák nem szokványosak, oldalaikra nem számok vannak írva, hanem kékre vagy pirosra vannak színezve. A játék nagyon egyszerű: feldobják mindkét kockát, és ha a kapott színek egyformák, akkor Anna nyer, különben pedig Benő.

Az egyik kockának öt kék lapja van és csak egy piros. Tudjuk, hogy a játék igazságos, azaz Annának és Benőnek is ugyanolyan esélye van nyerni. Hány kék és hány piros lapja lehet a másik kockának? (Feltételezzük, hogy bármelyik kockán bármelyik lap azonos eséllyel jön ki.)

1. megoldás

Ha a másik kockának minden lapja kék, akkor ötször akkora eséllyel lesz azonos a két szín, mint különböző, tehát a játék nem igazságos. Ugyanez a helyzet akkor, ha a másik kocka minden lapja piros, csak ekkor a különböző színeknek van ötször akkora esélye. Ha a másik kockának 1 piros és 5 kék lapja van, akkor a 36 lehetséges kimenetelből $1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 26$ ad azonos színt, és csak 10 jelent különbözőt. Ekkor sem igazságos a játék. Ha pedig a másik kockának 1 kék és 5 piros lapja van, akkor 26 esetben különböző a két szín, és csak 10-ben azonos. Ha a másik kockának 2 piros és 4 kék lapja van, akkor $1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 22$ esetben kapunk azonos színeket, és csak 14-ből különbözőt, ez sem jó. Ugyanígy, ha 2 kék és 4 piros lapja van, akkor 22 esetben különböző, 14-ben azonos színeket kapunk. Marad tehát az, hogy 3 piros és 3 kék lapja van a másik kockának. Ez nyilvánvalóan megfelel, hiszen az első dobástól függetlenül egyenlő esély van azonos és különböző színt dobni.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. megoldás

Tegyük fel, hogy k kék és $6-k$ piros lapja van a másik kockának. Számítsuk ki Anna nyerési esélyét. A két kocka $6 \cdot 6 = 36$ módon eshet le és ezek egyforma valószínűségű események. Ebből összesen $5 \cdot k$ esetben kapunk két kék oldalt és $1 \cdot (6-k)$ esetben két pirosat. Tehát Anna győzelmi esélye $\frac{5k+6-k}{36} = \frac{4k+6}{36}$. Másrészt mivel ugyanolyan eséllyel nyernek, ez az esély $\frac{1}{2}$. Tehát $\frac{4k+6}{36} = \frac{1}{2}$. Megoldva az egyenletet kapjuk, hogy ez $k = 3$ esetén teljesül. Tehát három kék és három piros oldala van a másik kockának.

5. Egy 8×8-as sakktábla minden mezőjére ráírtunk egy számot, mindegyikre különbözőt. Nevezzünk egy mezőt érdekesnek, ha oszlopában őrá írtuk a legnagyobb számot, sorában pedig a legkisebbet. Legfeljebb hány érdekes mező lehet a táblán?

Megoldás

Tegyük fel, hogy létezik két érdekes mező a táblán, a és b. Ezek nem lehetnek sem közös sorban, sem közös oszlopban. Legyen x az a mező, amely a-val egy sorban és b-vel egy oszlopban van. Ekkor az x-en lévő szám nagyobb, mint az a-ra írt, viszont kisebb, mint a b-re ír. Ebből következik, hogy az a-ra írt számnál nagyobb a b-re írt. Hasonlóan legyen y az a mező, amely a-val egy oszlopban és b-vel egy sorban van. Ekkor a rajta szereplő szám az a-n szereplőnél kisebb, a b-re írt számnál viszont nagyobb. Tehát a b-re kisebb számot kellet írni, mint a-ra. Mivel az a-ra szám nem lehet egyszerre kisebb és nagyobb a b-re írt számnál, ellentmondásra jutottunk. Tehát legfeljebb 1 érdekes mező lehet. Egy érdekes mező van pl. az alábbi kitöltésnél: az első hét sorba írjuk be 1-től 56-ig a számokat sorrendben. Az utolsó sorba írjuk 64-től 57-ig visszafele a számokat. Ekkor az 57-es nyilvánvalóan a legnagyobb az oszlopában és legkisebb a sorában, tehát érdekes a mezője.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.

Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ