TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Nevezzünk egy 3-jegyű számot „hegyszámnak”, ha a középső számjegye nagyobb a másik kettőnél, és „völgyszámnak”, ha a középső számjegy a legkisebb. A hegyszámok és völgyszámok ugyannyian vannak, vagy egyikből kevesebb akad? S ha igen, mennyivel?

1. megoldás

Ha a 3-jegyű számok közé számolnánk a 0-val kezdődőket is (például 079), akkor az $\overline{abc} \mapsto \overline{(9-a)(9-b)(9-c)}$ megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés lenne a hegyszámok és a völgyszámok között. A „valódi” 3-jegyű számok esetében annyi a különbség, hogy a 9-cel kezdődő völgyszámoknak nincs párja. Elég tehát ezeket megszámolni.

Egy ilyen szám $\overline{9ab}$ alakú, ahol $a < 9$ és $b > a$. Tehát a lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots, 8$ és ezekhez rendre $9, 8, 7, \ldots, 1$ megfelelő b párosítható.

Tehát a völgyszámok vannak többen, a többlet: $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$.

2. megoldás

Kiszámolhatjuk, hány hegyszám illetve völgyszám van, mondjuk ezek középső jegye szerint csoportosítva az eseteket.

középső jegy	völgyszámok	hegyszámok
9	0	$8 \cdot 9 = 72$
8	$1 \cdot 1 = 1$	$7 \cdot 8 = 56$
7	$2 \cdot 2 = 4$	$6 \cdot 7 = 42$
6	$3 \cdot 3 = 9$	$5 \cdot 6 = 30$
5	$4 \cdot 4 = 16$	$4 \cdot 5 = 20$
4	$5 \cdot 5 = 25$	$3 \cdot 4 = 12$
3	$6 \cdot 6 = 36$	$2 \cdot 3 = 6$
2	$7 \cdot 7 = 49$	$1 \cdot 2 = 2$
1	$8 \cdot 8 = 64$	0
0	$9 \cdot 9 = 81$	0
összesen	285	240

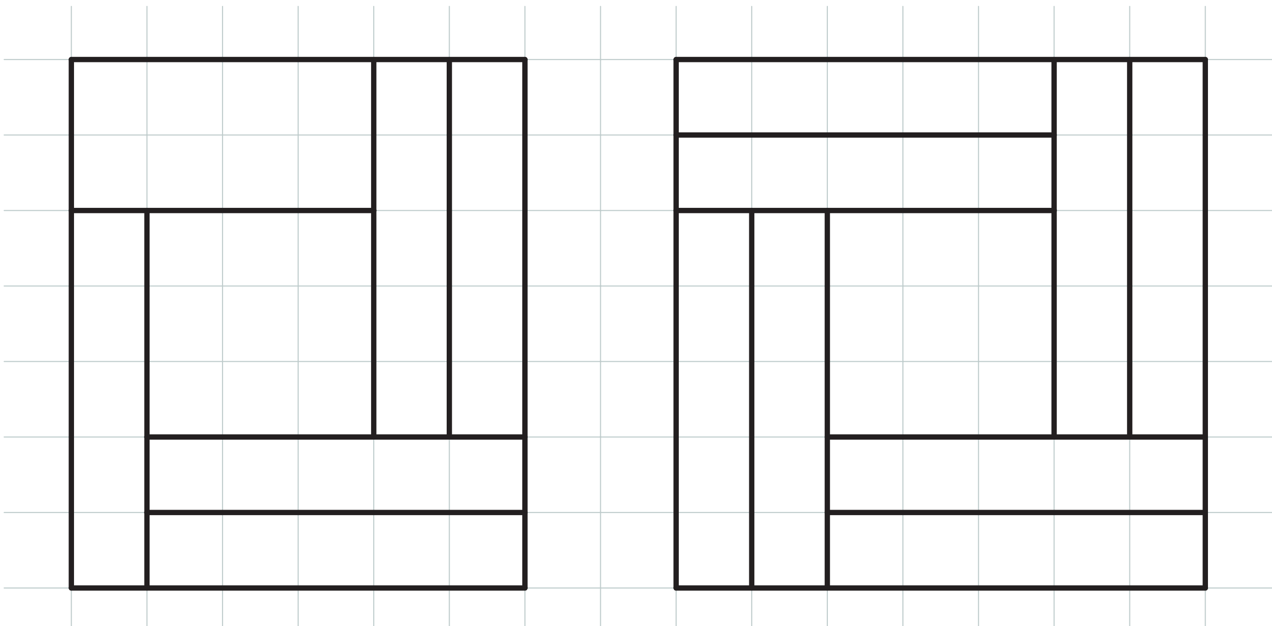
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. Ossz fel 12 centiméter kerületű téglalapokra
   (a) egy olyan téglalapot, amelynek szomszédos oldalai 6 cm és 7 cm hosszúak;
   (b) egy 7 cm oldalhosszúságú négyzetet!

   Elég egy-egy jó felosztást megadni, nincs szükség indoklásra. Ábráidon egyértelműen add meg valamennyi téglalap oldalainak hosszát!

   Megoldás

   Mivel a téglalap oldali egész oldal hosszúságúak, érdemes egész oldalhosszúságú téglalapokkal próbálkozni. Két szomszédos oldal összesen 6 hosszúságú, így három megfelelő van: az 1×5-ös, a 2×4-es és a 3×3-as. Egy lehetséges megoldás ilyen téglalapokkal:

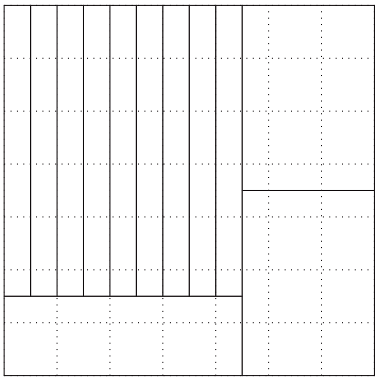


   Az (a) feladatra adott helyes konstrukció **3 pontot**, a (b)-re adott **4 pontot** ér.

   Megjegyzés

   A (b) kérdésre egy olyan megoldás, ahol az oldalak hossza nem egész szám:

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



3. Egy 3×3-as táblázatba természetes számokat írunk úgy, hogy a sorokba, illetve oszlopokba írt számok összege a táblázat mellett jelölt szám legyen, és a négy sarokmezőbe írt szám összege 10 legyen.

			10
			9
			8
8	9	10	

(a) Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy csupa kül. szám kerül a sarokmezőkbe?

(b) Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy minden beírt érték pontosan egyszer szerepel?

(c) Melyik a legnagyobb szám, ami a középső mezőbe kerülhet?

Megoldás

(a) Igen.

2	4	4	10
5	1	3	9
1	4	3	8
8	9	10	

(b) Nem. Soronként (vagy oszloponként) összegezve a beírt számokat azt kapjuk, hogy a kilenc szám összege $10 + 9 + 8 = 27$. Ha csupa különböző számmal töltöttük volna ki a táblázatot, akkor a számok összege legalább $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 7 + 8 = 36$ lenne.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

(c) Középen mindig 1 áll, ezért a lehetséges legnagyobb érték 1. Az első és utolsó sor összegéhez az első és utolsó oszlop összegét adva $10 + 8 + 10 + 8 = 36$ adódik. Ebben az összegben a négy sarok kétszer van számolva, a négy „élközép” mező pedig egyszer, tehát az „élközép” mezőkre írt számok összege $36 - 2 \cdot 10 = 16$.

Ha a középső sor összegéhez a középső oszlop összegét adjuk, akkor az egyrészt $9 + 9 = 18$, másrészt ez az összeg a négy „élközép” szám összegénél a középső szám duplájával nagyobb.

Jelöljük a középső számot x-szel. Azt kaptuk, hogy $16 = 18 - 2 \cdot x$, innen $x = 1$.

4. Hány olyan 10000-nél kisebb pozitív egész szám van, amely pontosan kétféle számjegyet tartalmaz?

Megoldás

Jelöljük egy ilyen szám első jegyét a-val, a-tól különböző másik jegyét pedig b-vel. a kilencféle értéket vehet fel (nullát nem), b szintén, mert a-tól különböznie kell, de lehet nulla is. Így a és b kiválasztása összesen $9 \cdot 9 = 81$-féle módon történhet.

Most felsoroljuk, hogy egy rögzített (a, b) pár esetén hányféle elrendezése van a számjegyeknek. A számjegyek száma szerint csoportosítjuk az eseteket. A 10000-nék kisebb számok legfeljebb négyjegyűek, és mivel van két különböző jegy, legalább kétjegyűek jöhetnek szóba.

- **kétjegyűek**: ab (1)
- **háromjegyűek**: aab, aba, abb (3)
- **négyjegyűek**: $aaab$, $aaba$, $abaa$, $aabb$, $abab$, $abba$, $abbb$ (7)

Tehát összesen $81 \cdot (1 + 3 + 7) = 81 \cdot 11 = 891$ megfelelő szám van.

5. Az $A, Á, K, L, M, Ó, R, S, Z$ betűk mindegyike egy számjegyet jelöl 1-től 9-ig. A különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. A következőket tudjuk:

- $S \cdot Z \cdot Á \cdot M = 180$,
- $L \cdot Á \cdot Z = 162$,
- $S < Z < Ó < R$, valamint
- $KAL + MÁR + LÁS + ZLÓ = 2019$.
  (Itt KAL, $MÁR$, $LÁS$ és $ZLÓ$ a megfelelő számjegyek egymás után írásával kapott háromjegyű számokat jelölik.)

Határozd meg, hogy melyik betűt mennyit ér!

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás

Egy lehetséges gondolatmenet:

- $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ és $162 = 2 \cdot 3^4$, tehát a $Z \cdot Á$ szorzatból csak két hármas tényező jöhet, így a második feltétel miatt csak $\boxed{L = 9}$ lehetséges, és $\{Á, Z\} = \{3, 6\}$.
- Most az első feltételből $S \cdot M = \frac{180}{3 \cdot 6} = 10$, így $\{S, M\} = \{2, 5\}$.
- Az utolsó feltételben a végződések összegét vizsgálva kapjuk, hogy $R + S + Ó$ 0-ra végződik. Az eddig „lefoglalt” jegyek miatt $\{Ó, R\} \subset \{1, 4, 7, 8\}$.
- Most elágazunk S lehetséges értékei alapján.
  - $\boxed{S = 5}$.
    Ekkor $\boxed{M = 2}$ és $Z > S$ miatt csak $\boxed{Z = 6}$ lehetséges. Most $S < Ó < R$ alapján csak $\boxed{Ó = 7}$ és $\boxed{R = 8}$ teljesülhet, továbbá Z választása miatt az maradt, hogy $\boxed{Á = 3}$. Az ismert értékeket visszaírva az utolsó feltételbe: $\overline{KA9} + 238 + 935 + 697 = 2019$, innen $\boxed{K = 1}$ és $\boxed{A = 4}$.
  - $\boxed{S = 2}$.
    Ekkor $R+Ó$ 8-ra végződik, de mivel 9-nél kisebb számjegyekről van szó, ezért $R+Ó = 8$. Viszont $Z \geq 3$ és $S < Z < Ó < R$ miatt $R + Ó \geq 5 + 4 = 9$, tehát ez az eset nem lehetséges.

Azt kaptuk, hogy az egyetlen lehetséges megoldás: $A = 4, Á = 3, K = 1, L = 9, M = 2, Ó = 7, R = 8, S = 5, Z = 6$.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.

Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő