TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

Minden állításodat bizonyítanod kell. Csak akkor elegendő az eredmény puszta közlése, ha a feladat szövegében szerepel, hogy „*nincs szükség indoklásra*”.

1. Marika és testvére fiatal koruk óta rendszeresen ültetnek citrommagokat, és gondozzák a belőlük kihajtó citromfákat. Az A, B és C jelű fákat különösen megkedvelték, mert ezek mind az évnek azonos napján hajtottak ki, Marika születésnapján.

   Marika az idei (2019-es) szülinapon azt figyelte meg, hogy 3 év múlva ezen a napon B pont kétszer olyan idős lesz, mint A, míg a következő 3 év elteltével meg C lesz pont kétszer olyan idős, mint B.

   Melyik években lesz majd lehetséges, hogy a 3 fácska együtt éppen 111 éves a közös szülinapon? Az összes lehetőséget keresd meg!

   Megoldás

   Jelölje E_A, E_B, E_C a három fa életkorát a 2019-es születésnapon és jelölje X, hogy hány év múlva lesznek együtt 111 évesek. A feladat alapján a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$2(E_A+3)=E_B+3$$

$$2(E_B+6)=E_C+6$$

$$(E_A+X)+(E_B+X)+(E_C+X)=111$$

   Az első egyenletből kapjuk, hogy $2E_A+3=E_B$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $4E_A+12=E_C$. Mindkettőt behelyettesítve a harmadik egyenletbe a következő diofantikus egyenletre jutunk:

$$E_A+X+2E_A+3+X+4E_A+12+X=111$$

   Ebből $7E_A+3X=96$ következik. Mivel E_A és X nemnegatív egészek, így E_A legfeljebb $\frac{96}{7}<14$. Végigpróbálva ezt a 14 esetet, az alábbi megoldásokat kapjuk:

E_A	0	3	6	9	12
X	32	25	18	11	4

Erről leolvashatjuk, hogy a szóbajövő évszámok: 2023, 2030, 2037, 2044, 2051. Ellenőrizve a kapott megoldásokat láthatjuk, hogy ezek tényleg lehetnek is.

2. Két szabályos dobókockával, egy pirossal és egy kékkel dobunk. A piros szám lesz egy számtani sorozat első tagja, a kék pedig a differenciája. Minek nagyobb az esélye: annak, hogy a kapott sorozatban lesz köbszám (három egyforma szám szorzataként megkapható szám), vagy annak, hogy nem?
(Ha például a piros szám 2, a kék szám 5, akkor a kapott sorozat a 2, 7, 12, ..., és ebben a sorozatban van köbszám, a $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.)

Megoldás

Ha a kék kockával 1-et dobunk, akkor a sorozat tagja lesz a 8, tehát lesz köbszám a sorozatban. Ha a kékkel 2-t dobunk, akkor vagy a 8, vagy pedig a 27 szám szerepelni fog a sorozatban, a piros paritásától függően. Ha a kék kockával 3-at dobunk a $27, 64, 512$ számok közül fog valamelyik szerepelni, hiszen a mindenféle hármas maradék előfordul közöttük, és nem tudunk náluk nagyobbat dobni. Tehát legalább az esetek felében lesz köbszám a sorozatban, hiszen ha a kékkel 4-nél kevesebbet dobunk, akkor biztosan lesz. Viszont a feladatban is szereplő példa alapján akkor is lehet köbszám, ha a kékkel 5-t dobunk. Tehát biztosan annak az esélye nagyobb, hogy szerepel köbszám a sorozatban.

3. Az $ABCD$ négyzet oldalaira kifelé megrajzoljuk az ABP, BCR, CDS, DAT szabályos háromszögeket. Az így kapott A, B, C, D, P, R, S, T pontok hány egyenlő szárú háromszöget határoznak meg? Ezek közül hány szabályos?

Megoldás

Legyen a négyzet oldala egységnyi. Először vizsgáljuk meg, hogy hány egyenlő szárú háromszög jön létre, melynek a szárai közötti elhelyezkedő csúcsa A. A konstrukció miatt B, D, P és T egység távolságra van A-tól. Ezek közül bármelyik kettőt választhatjuk A mellé, tehát kaptunk hat egyenlő szárú háromszöget. Csak a C csúcs van $\sqrt{2}$ távolságra így azt nem használhatjuk. Az R és S csúcsok távolsága A-tól a szimmetria miatt egyenlő (Pitagorasz tétel alapján $\sqrt{(1+\sqrt{3}/2)^2+(1/2)^2}$). Tehát itt egy háromszöget találtunk. Ez összesen 7 háromszög. Szimmetriai okokból B, C és D is hétszer szerepel szárak közötti csúcsként egyenlő szárú háromszögben. Eddig tehát $4 \cdot 7 = 28$ háromszöget találtunk.

Most vizsgáljuk meg, hogy hány egyenlő szárú háromszög jön létre, melynek a szárai közötti elhelyezkedő csúcsa P. A PBR és PBC háromszögek egybevágósága miatt $PR = PC$, és a szimmetria miatt $PD = PT$ is egyenlő velük. Tehát P-től egyenlő távol van R, C, D és T. A

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

és B is egyenlő távol van, de más távolságra. Tehát itt is 7 háromszöget találtunk, az R, S, T pontokra is megnézve összesen 28-at.

Tehát összesen $4 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 56$ egyenlő szárú háromszöget számoltunk, de a szabályosakat minden csúcsokból számoltuk, úgyhogy le kell vonni kétszer a számukat.

A feladat megadott négy szabályos háromszöget. Mivel $PR = PD$, valamint a szimmetria miatt $PD = RD$, ezért a DPR háromszög is szabályos. Ugyanígy az ARS,BST,CTP háromszögek is. Ellenőrizhető, hogy az egyenlő szárú háromszögeink közül más nem lesz szabályos. Tehát 8 szabályos háromszög van és $56 - 2 \cdot 8 = 40$ egyenlő szárú.

4. Egy kör alakú asztalnál gyerekek ülnek (legalább ketten). Két gyereket közelinek nevezünk, ha szomszédosak vagy ha csak egyetlen gyerek ül közöttük. A gyerekek szeretnének átülni úgy, hogy ha két gyerek eddig közeli volt, akkor az átrendezés után már ne legyenek közeliek.

   Legkevesebb hány gyerek esetén lehetséges egy ilyen átrendezés?

   Megoldás

   Először megmutatjuk, hogy kilenc vagy kevesebb gyerek esetén ez nem lehetséges. Legyen k a gyerekek száma, és jelöljük a gyerekeket az $1, 2, \ldots, k$ számokkal a szerint, hogy a kör mentén hányadik helyen ülnek.

   Vizsgáljuk meg, hogy 1-nek kik lehetnek a szomszédai az átülést követően. Most $2, 3, k-2$ és $k-1$ ülnek közel 1-hez, tehát ők nem kerülhetnek mellé. Tehát $4, 5, \ldots, k-2$ közül kell választanunk két embert. Viszont a két mellé ülő ember az átülés után közel lesz egymáshoz, tehát az átülés előtt nem lehetnek közel. Ebből rögtön látszik, hogy legalább kilenc gyerekre szükség van, hiszen legfeljebb nyolc főnél még a $4, 5, \ldots, k-2$ gyerekek mind páronként közel vannak egymáshoz. Ha pont kilenc gyerek van, akkor az előző gondolatmenet alapján 1-nek csak 4 és 7 lehet a két új szomszédja. Viszont 4-re eljátszva ugyan ezt a gondolatmenetet azt kapjuk, hogy 4-nek csak 1 és 7 lehet a két új szomszédja. Ez a két feltétel már nem teljesülhet egyszerre, tehát kilenc fővel nem oldható meg a feladat. Tíz fő esetén már létezik megoldás, például a következő új sorrend megfelelő:
   $4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 10, 7.$

5. Egy egyenlőszárú háromszögben az egyik oldal kétszer olyan hosszú, mint az egyik magasság. Hány fokosak lehetnek a háromszög szögei? Az összes lehetőséget keresd meg!

   Megoldás

   A feladat megoldásához a következő ismert állításokat használjuk fel.

   - Ha egy derékszögű háromszög átfogója kétszer olyan hosszú mint az egyik befogója, akkor a háromszög félszabályos, azaz a szögei $30°, 60°, 90°$. Azt is tudjuk, hogy a $60°$ helyezkedik el átfogó és a fel olyan hosszú befogó között.

- Ha egy derékszögű háromszög két befogója egyforma hosszú, akkor a szögei $45°, 45°, 90°$.

Legyenek a háromszögünk csúcsai A, B és C úgy, hogy A-ben találkozik a két szár. Jelöljük a háromszög alapjának hosszát a-val a szárának hosszát pedig b-vel. Jelöljük m_a-val az alaphoz tartozó magasság hosszát, m_b-vel pedig a szárhoz tartozó magasságét.

Legyen T az A-ból induló magasság talppontja.

Első eset: $a = 2m_a$. Ekkor ATB két befogója egyenlő, tehát a szögei $45°, 45°, 90°$. Két ilyen összeillesztésével egy $45°, 45°, 90°$ szögekkel rendelkező háromszöget kapunk.

Második eset: $b = 2m_a$. Ekkor ATB átfogója kétszer olyan hosszú mint az egyik befogója, tehát a szögei $30°, 60°, 90°$, és A-nál van a 60 fokos szög. Ebből következik, hogy ABC szögei $30°, 30°, 120°$.

Harmadik eset: $a = 2m_b$. A terület képletekből adódik, hogy $am_a = bm_b$. Ebbe helyettesítve $b = 2m_a$-t kapjuk, hogy $a = 2m_b$. Tehát ez az eset megfelel az előzőnek.

Negyedik eset: $b = 2m_b$. Legyen a B pont talppontja S. Akkor az ASB háromszög derékszögű, és az átfogója kétszer olyan hosszú, mint az egyik befogója. Vagyis akkor az ASB háromszög szögei $30°, 60°, 90°$, és az A-nál lévő szög $30°$. Ez a szög viszont lehet külső vagy belső szög az alapján, hogy a háromszög hegyes vagy tompaszögű. Ha a háromszög hegyesszögű, akkor a BAC szög $30°$, vagyis a háromszög szögei $30°, 75°, 75°$ fokosak. Ha a háromszög tompaszögű, akkor a BAC szög $150°$, vagyis a háromszög szögei $15°, 15°, 150°$ fokosak.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.

Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő