



Kalmár László (matematikus)

43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVESENÝ
MEGYEI FORDULÓ

HATODIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Ismerkedj a 100 tulajdonságaival!

I.) Állítsd elő a 100-at $a, 2, b, 3, c, 4, d, 5$ négyzetszám összegeként! Egy-egy négyzetszámot legfeljebb kétszer használhatsz!

II.) Állítsd elő a 100-at köbszámok összegeként! Egy-egy köbszámot legfeljebb kétszer használhatsz!

Mindegyik feladatrészre egy-egy megoldást keress!

Megjegyzés: Legyen $n \geq 1$ természetes szám. Ekkor n^2 -et négyzetszámnak, n^3 -t köbszámnak mondjuk, ahol $n^2 = n \cdot n$ és $n^3 = n \cdot n \cdot n$.

Megoldás:

I.) A felsorolás szempontja legyen az, hogy a négyzetszámokat nem növekvő (zömmel csökkenő) sorrendben adjuk meg.

A négyzetszámok 100-ig

$$1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81, 10^2 = 100.$$

a, Ha **két** tagból áll az összeg, akkor $6^2 + 8^2 = 100$. Több nincs. 1 pont

b, **Három** tagból nem lehet előállítani. A négyzetszámok 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot adnak. A 100 pedig 3-mal osztva 1 maradékot ad. Tehát ki kell választanunk a 9, 36 és 81 közül kettőt és ezek összegéhez kellene adnunk egy olyan négyzetszámot, amely 3-mal osztva 1 maradékot ad. $100 - (9 + 36) = 55$ nem négyzetszám, $100 - (9 + 81) = 10$ szintén nem négyzetszám, a 36 és a 81 összege pedig eleve sok. Hasonlóan belátható, hogy két egyforma, 3-mal osztható négyzetszám segítségével sem lehet előállítani: $100 - (9 + 9) = 82$ nem jó,

$100 - (36 + 36) = 28$ nem jó, $100 - (81 + 81)$ negatív, nem jó. 3 pont



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

c, Négy tagból: $9^2 + 3^2 + 3^2 + 1 = 100$, $8^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 = 100$, $7^2 + 7^2 + 1 + 1 = 100$,
 $7^2 + 5^2 + 5^2 + 1 = 100$. 1 pont

d, Öt tagból: $7^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 1$, 1 pont

Megjegyzés:

Hat tagból: $7^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 1$, $7^2 + 5^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$.

Hét tagból: $7^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1 + 1$.

II.) Köbszámok 100-ig $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$.

Négy köbszámból: $4^3 + 3^3 + 2^3 + 1 = 100$. Több megfelelő előállítás nincs. 1 pont

2. Egy régi számlán ez áll:

237 darab (a termék neve olvashatatlan), az egységár *I* Ft ** fillér,
fizetendő végösszeg 7***0 Ft 65 fillér.

A *-ok helyén álló számjegyek olvashatatlanok. Minden csillag egy számjegyet jelöl. Számítsd ki a hiányzó számjegyeket! (1 Ft = 100 fillér)

Megoldás:

Fogalmazzuk meg a feladatot írásbeli műveletként!

A hiányzó számjegyeket betűkkel jelöltük. A szorzást a szorzó legkisebb helyi értékű jegyével kezdtük az ábrán. A szorzandó balról második jegye az 1 (egy) és nem l (el) betű.

(Nem biztos, hogy a részletszorzatok helyi értékes leírása tökéletesen jelenik meg a monitoron vagy nyomtatásban.)

alb,cd · 237

efghij

klmno

pqrst

7xyz0,65



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

A d számjegy csak 5 lehet, mert csak a 7-szer 5 végződik 5-re. A középső részletszorzat utolsó jegyét a 3-szor d -ből kapjuk, tehát $o = 5$.

Az i értékét a tizedek oszlopán tudjuk leolvasni, tehát $i = 1$. Figyeljük újra a 7-tel való szorzatot! $7 \cdot 5 = 35$ miatt a c -nek 4-nek kell lenni, csak akkor lesz $i = 1$. Most már be tudjuk írni a második és harmadik részletszorzat utolsó előtti jegyeit is.

$$\begin{array}{r} \underline{a1b,45 \cdot 237} \\ efgh15 \\ klm35 \\ \underline{pqr90} \\ 7xyz0,65 \end{array}$$

A tizedes vessző előtti egyesek oszlopán leolvashatjuk, hogy $h = 7$. A 7-szer $b + 3$ csak akkor végződik 7-re, ha $b = 2$. Újabb számjegyeket tudunk megfejteni: $m = 7$, $r = 4$, $g = 8$, $l = 3$, $q = 2$. $z = 5$, $y = 0$.

Az első és a második részletszorzat értéke 1-gyel növeli a p értékét, így csak az $a = 3$ lehetséges. Ezek után a teljes szorzás:

$$\begin{array}{r} \underline{312,45 \cdot 237} \\ 218715 \\ 93735 \\ \underline{62490} \\ 74050,65 \end{array}$$

Tehát az egységár 312,45 Ft, a fizetendő összeg 74050,65

Pontozás: a helyes megoldó stratégiára már adhatunk 2 pontot, még akkor is, ha a tanuló elszámol vagy nem tudja végig vinni. 5 pontot érdemel a helyes szorzás felírása. A hiányzó 2 pont akkor jár, ha a tanuló néhány részeredményt logikusan meg tud indokolni.

3. Az $ABCD$ négyzet oldalainak hossza nyolc egység. Az AB oldalon levő P pont öt egység távolságra van az A ponttól, a BC oldalon levő R pont két egység távolságra van a C ponttól, míg a négyzet belsejében levő Q pont a CD és AD oldalaktól is egy egység távolságra van. Számítsd ki a PQR háromszög területét!

Megoldás:

Készítsük el a szöveg alapján a megfelelő ábrát!

1 pont

A PQR háromszög területét úgy számítjuk ki, hogy a négyzet területéből levonjuk a felesleges részek területét.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

Az ABCD négyzet területe 64 egység, ebből fogjuk levonni a "felesleges" részeket. 2 pont

A jobbsó sarokban lévő PBR háromszög területe $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$.

1 pont

A jobb felső sarokban lévő trapézt felbonthatjuk egy téglalpra és egy derékszögű háromszögre, ezért a területe $7 + \frac{1 \cdot 7}{2} = 10,5$.

1 pont

A bal alsó sarokban lévő trapéz is felbontható egy téglalpra és egy derékszögű háromszögre, ezért a területe $7 + \frac{4 \cdot 7}{2} = 21$.

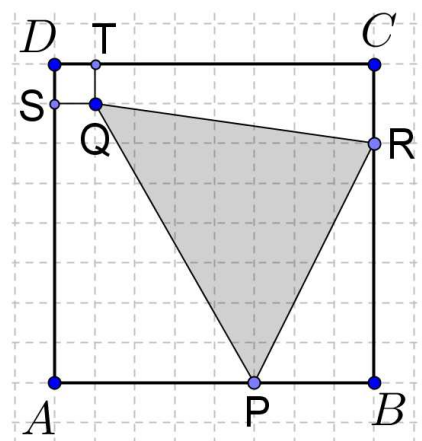
1 pont

A bal felső sarokban van még egy 1 területű négyzet.

Tehát $64 - 9 - 10,5 - 21 - 1 = 22,5$.

1 pont

Megjegyzés: Bizonyára sok tanuló a PQR háromszöget próbálja részekre bontani és ezekből rakja ki a háromszög területét. Ha így is sikerül leszámolni a háromszög területét, akkor megkaphatja a 7 pontot. Ha értékes részeredményeket ér el, de nem tudja befejezni, akkor legfeljebb 3 pontot kapjon.



4. *Tibi és Kati testvérek. A szüleiélre kabátot, sapkát és nadrágot vettek a gyerekeknek. A Tibi ruháinak mindegyike 50 %-kal drágább voltak, mint a Kati megfelelő ruhája. Tibi kabátja 10-szer annyiba került, mint a sapkája és háromszor annyi volt, mint a Kati nadrágja és sapkája együtt. Mennyibe kerültek az egyes ruhadarabok, ha a szülők 75 ezer forintot fizettek összesen a hat ruhadarabért?*



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

I. Megoldás:

Foglaljuk a feladat feltételeit egy áttekinthető táblázatba:

	kabát	sapka	nadrág
Kati	k	s	n
Tibi	1,5k	1,5s	1,5n

Továbbá: $1,5k = 15s$ (Tibi alapján), tehát $k = 10 \cdot s$ 2 pont

$1,5k = 1,5k = 3 \cdot (n + s)$ E két egyenlőségből $15 \cdot s = 3 \cdot (n + s)$.

Rendezve $12 \cdot s = 3 \cdot n$, $4 \cdot s = n$. Ezek alapján módosíthatjuk a táblázatunkat: 2 pont

	kabát	sapka	nadrág
Kati	$10 \cdot s$	s	$4 \cdot s$
Tibi	$15 \cdot s$	1,5s	$6 \cdot s$

Mivel a szülők 75 000 Ft-ot fizettek, ezért felírhatjuk a következő egyenlőséget:

$10 \cdot s + s + 4 \cdot s + 15 \cdot s + 1,5 \cdot s + 6 \cdot s = 75000$. Összevonások után:

$37,5 \cdot s = 75000$ $s = 2000$ 2 pont

Tehát Kati ruhái 20000, 2000 és 8000 Ft-ba, a Tibié pedig 30000, 3000 és 12000 Ft-ba kerültek.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott értékek helyességéről. 1 pont

II. megoldás: Mivel Tibi minden ruhája 1,5-szer annyiba kerül, mint Katié, Kati ruhái együtt 75000 : 2,5 = 30000 forintba, Tibi ruhái 45000 forintba kerülnek. 3 pont

Tibi kabátja háromszor annyiba kerül, mint Kati sapkája és nadrágja, Tibi sapkája és nadrágja pedig 1,5-szer annyiba. Így Tibi ruhái 4,5-szer annyiba kerülnek, mint Kati sapkája és nadrágja. Ebből Kati sapkája és nadrágja együtt $45000 : 4,5 = 10000$ forint, tehát Tibi kabátja 30000 forint.

3 pont

Ekkor Tibi sapkája $30000 : 10 = 3000$ Ft, nadrágja $45000 - 33000 = 12000$ Ft, Kati kabátja 20000 Ft, sapkája 2000 Ft, nadrágja 8000 Ft. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott értékek helyességéről. 1 pont



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

5. Hány darab 45-tel osztható \overline{abcba} alakú ötjegyű szám van, ahol a , b és c különböző számjegyeket jelöl?

Megoldás:

45-tel pontosan akkor osztható egy szám, ha 9-cel és 5-tel is osztható. 5-tel pontosan akkor osztható egy szám, ha 5-re vagy 0-ra végződik.

Mivel a nem lehet 0, így a csak 5 lehet. Az eredeti számunk osztható 9-cel, így számjegyeinek összege, $10+2b+c$ is osztható 9-cel. Mivel $2b+c$ legnagyobb értéke 27, ezért $10+2b+c$ lehetséges értékei 18, 27, 36. 3 pont

I. eset: Ha $2b+c=8$, akkor a lehetséges számjegyek $b=4, c=0$, $b=3, c=2$, $b=2, c=4$, $b=1, c=6$, $b=0, c=8$. Ez öt megoldás. 2 pont

II. eset: Ha $2b+c=17$, akkor a lehetséges számjegyek: $b=8, c=1$, $b=7, c=3$, $b=6, c=5$, $b=5, c=7$, $b=4, c=9$. Itt a 6, 5 és 5, 7 párok nem megfelelőek, mert nem lenne minden számjegy különböző. Ez tehát 3 megoldás. 1 pont

III. eset: Ha $2b+c=26$, akkor a lehetséges számjegyek: $b=9, c=8$. Ez egy megoldás. Összesen $5+3+1=9$ megoldás van. 1 pont

Valamennyi feladat hibátlan megoldása 7 pontot ér, így az elérhető maximális pontszám 35.

Budapest, 2014. március 22.