



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVESENÝ MEGYEI FORDULÓ

NYOLCADIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. *Az apa, az anya és a három lányuk együtt 118 évesek. Az anya 10 évvel idősebb, mint a három lány együtt. A szülők életkora közötti különbség éppen a legkisebb lány életkorával egyenlő. Az egyik lány 2 évvel fiatalabb, mint a másik és ugyanannyival idősebb a harmadiknál. Hány évesek a szülők?*

Megoldás

A szülők életkorára vonatkozó információ kétértelmű, lehet, hogy az anya idősebb, lehet, hogy az apa. Tehát a feladatnak két megoldása lesz.

I. eset: Legyen az apa idősebb. Ha a legfiatalabb lány x éves, akkor a középső $x + 2$, a legnagyobb pedig $x + 4$. Ekkor az anya életkora $x + x + 2 + x + 4 + 10 = 3x + 16$. Az apa ennél x évvel több, tehát $4x + 16$. 2 pont

Felírhatjuk a következő egyenletet:

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (3 \cdot x + 16) + (4 \cdot x + 16) = 118. \quad 1 \text{ pont}$$

Végezzük el a szükséges összevonásokat: $10x + 38 = 118$, ahonnan $x = 8$.

A lányok 8, 10 és 12 évesek, az anya 40, az apa 48. Ez teljes egészében kielégíti a feladat követelményeit. 1 pont

II. eset: Legyen az apa fiatalabb. Az előbbieket felhasználva a lányok x , $x + 2$, $x + 4$ évesek, az anya $3x + 16$, az apa pedig $2x + 16$. 1 pont

Az előbbihez hasonló egyenletet írunk fel:

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (3 \cdot x + 16) + (2 \cdot x + 16) = 118 \quad 1 \text{ pont}$$

Rendezve:

$8x + 38 = 118$, $x = 10$. Tehát ebben az esetben a lányok 10, 12, 14 évesek, az anya 46, az apa 36 éves. Ez is jó megoldás. 1 pont



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

Megjegyzés: Elképzelhető, hogy ezen adatok is megfelelnek a valóságnak, vagyis van ilyen család.

2. *Igazoljátok, hogy egy olyan négyjegyű természetes szám, amelynek két-két számjegye azonos, nem lehet prímszám (törzsszám)!*

Megoldás:

A szövegben szereplő négyjegyű számok algebrai alakja \overline{aabb} , \overline{abab} , \overline{abba} . Mindegyik esetben alkalmazzunk helyi értékes felbontást és keressünk egy olyan 1-nél nagyobb természetes számot, amellyel a vizsgált kifejezés osztható. 1 pont

a, $\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b$, ami osztható 11-gyel. 2 pont

b, $\overline{abab} = 1000a + 100b + 10a + b = 1010a + 101b$, ez 101-gyel osztható. 2 pont

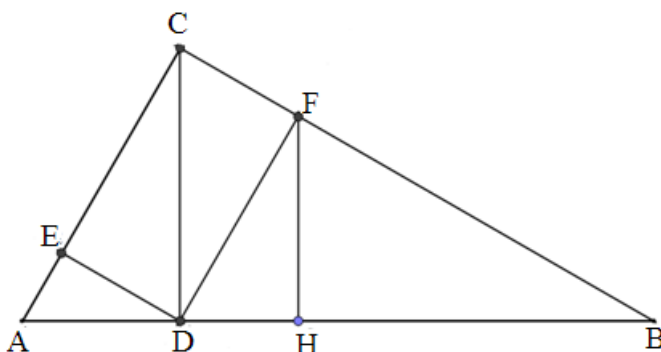
c, $\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 \cdot (143a + 10b)$. Az átalakításokból látható, hogy osztható 11-gyel. 2 pont

3. *Az ABC derékszögű háromszög átfogója AB, a CAB szög 60 fokos. A C-ből induló magasság talppontja D. Az ADC háromszögben a D-ből induló magasság talppontja E, a CDB-ben az egyik magasság DF. A DFB háromszög F-ből induló magassága FH. Igazoljátok, hogy $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE}$!*

I. megoldás:

Készítsünk a feladat szövege alapján olyan ábrát, amely jó közelítéssel tükrözi a feladatbeli mennyiségi viszonyokat!

Ismeretes, hogy a 30, 60, 90 fokos szögekkel bíró háromszögben az átfogó kétszerese a rövidebbik befogónak.





TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

Ezt fogjuk felhasználni a megoldás során többször is.

1 pont

Tehát: $AC = \frac{1}{2} AB$, $AD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{4} AB$, továbbá $AE = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{8} AB$, $DH = \frac{1}{2} DF$.

A CEDF téglalapban $DF = CE = AC - AE = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) AB = \frac{3}{8} AB$. Tehát $DH = \frac{3}{16} AB$.

2 pont

Ebből két dolog következik.

Egyrészt $HB = AB - AD - DH = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right) \cdot AB = \frac{9}{16} AB$.

2 pont

Másrészt $HA + AE = AD + DH + AE = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}\right) \cdot AB = \frac{9}{16} AB$.

2 pont

Tehát $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE} = \frac{9}{16} \cdot AB$, s ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás:

Az ábra jelölései alapján kicsit rövidebben: $AD = 2 \cdot AE$,

$AC = 2 \cdot AD = 4 \cdot AE$, $AB = 2 \cdot AC = 8 \cdot AE$, $DB = AB - AD = 6 \cdot AE$,

$DF = DB : 2 = 3 \cdot AE$, $DH = DF : 2 = 1,5 \cdot AE$, $HA = AD + DH = 3,5 \cdot AE$,

$HB = DB - DH = 4,5 \cdot AE$, amiből adódik, hogy $HB = HA + AE$.

A pontozást lásd fentebb. Minden jó megoldásra adjuk meg a 7 pontot.

4. *Hány olyan konvex négyszög, ötszög, hatszög van, amelynek három egymás után következő csúcsa $A(0; 4)$, $B(4; 4)$ és $C(4; 0)$ koordinátájú pont, és többi csúcsának koordinátái is nem negatív egész számok? (A konvex sokszög minden belső szöge 180 foknál kisebb.)*



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

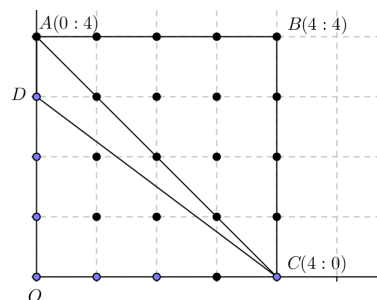


Kalmár László (matematikus)

Megoldás:

Egy ilyen háromszög van, maga az ABC háromszög.

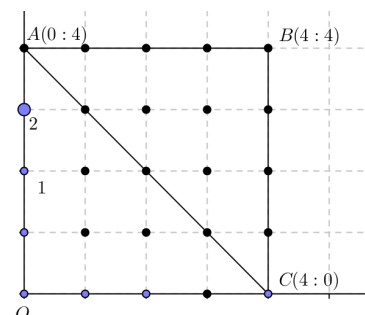
Négyszögek száma: az ABCD négyszögek negyedik csúcsát (mondjuk D) azon rácspontok alkotják, amelyek az AD egyenestől jobbra, az AC egyenestől balra helyezkednek el, s ide értjük az x és y tengely nem negatív koordinátájú pontjait is, de az AC egyenes pontjait nem. Vagyis az AOC háromszögben vagy a határán, de nem az AC egyenesen. Ezek száma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ négyszög.



2 pont

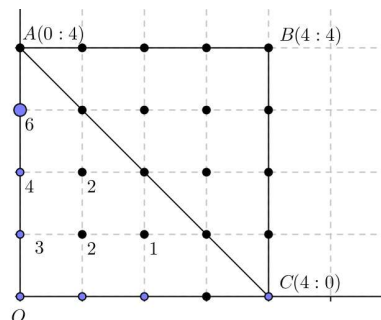
Ötszögek száma: CBADE ötszögek D és E csúcsai is a négyszögeknél leírt tartományban lesznek. A D csúcs számára szóba jöhető pontnál beírtuk, hogy az E pont hányféleképpen választható meg. Pl.: (0; 3) koordinátájú pontnál 6 szerepel, ami azt jelenti, hogy ezt választva D-nek hatféleképpen rendelhető hozzá megfelelő E pont.

Tehát ezek száma: $6 + 4 + 2 + 3 + 2 + 1 = 18$ lehetőség.



3 pont

Hatszögek száma: Az CBADEF hatszögek D, E és F csúcsai is a négyszögeknél leírt tartományban lesznek. A D csúcs számára szóba jöhető 2 pontnál beírtuk, hogy az E és F pont hányféleképpen választható meg. Tehát ezek száma:
 $2 + 1 = 3$ lehetőség.



2 pont

Hétszöget már nem lehet kijelölni.

Tehát a megoldások száma: $10 + 18 + 3 = 31$



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

5. Tamás elfelejtette a vidéki barátja vezetékes telefonszámát. A következőkre emlékszik: balról számítva az első számjegye 5, a szám hatjegyű, páros, továbbá 4-gyel, 5-tel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal osztva ugyanazt a nullától különböző maradékot adja. Mi volt az elfelejtett telefonszám?

I. megoldás:

A 4-gyel való osztás miatt a maradék 1, 2, 3 lehet. Ha a maradék páros, akkor az csak 2 lehet.

1 pont

Jelölje T a keresett telefonszámot. Ekkor $T - 2$ osztható 4-gyel, 5-tel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal.

2 pont

Ha egy szám osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal, akkor 1001-gyel is. Az ilyen számok $\overline{5ab5ab}$ alakúak.

2 pont

De T osztható 4-gyel, 5-tel, 9-cel is, így osztható ezek legkisebb közös többszörösével a 180-nal is. Tehát keresnünk kell a 180180 számnak egy olyan többszörösét, amely ötössel kezdődik. Ez lesz a $T - 2 = 540540$, tehát $T = 540542$.

2 pont

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy ez a szám megfelel a feladat követelményeinek, több megoldás pedig nincs.

Megjegyzés:

Sokat rövidítünk a megoldáson, ha észrevesszük, hogy $T - 2$ osztható 4-gyel, 5-tel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal. Ezen számok legkisebb közös többszöröse 180180. Ennek egyetlen többszöröse kezdődik 5-össel, ez pedig az 540540. Tehát a keresett telefonszám 540542.

Valamennyi feladat hibátlan megoldása 7 pontot ér, így az elérhető maximális pontszám 35.

Budapest. 2014. március 22.