44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

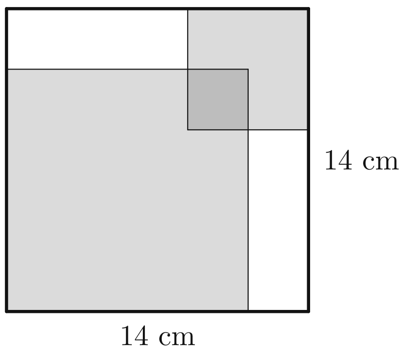
Országos döntő, 1. nap - 2015. május 29.

ÖTÖDIK OSZTÁLY - Megoldások

1. Egy háromjegyű szám középső számjegyét elhagyva egy kétjegyű számot kaptunk. A két szám összege 816. Mi lehet ez a két szám?

   Megoldás
   A háromjegyű szám első számjegye 7. 6 kevés lenne, mert így az összeg legfeljebb $699 + 69 = 768$ lenne, 8 pedig sok, mert úgy az összeg legalább $800 + 80 = 880$ lenne. Az összeg 6-ra végződik és ez két egyforma számjegy összege, ezért csak itt $3+3 = 6$, vagy $8+8 = 16$ lehetséges. Ezért az utolsó számjegy 3 vagy 8. Ha az utolsó számjegy 3, akkor a kétjegyű szám 73, így $816 - 73 = 743$ a háromjegyű. Ha az utolsó számjegy 8, akkor a kétjegyű szám 78, így $816 - 78 = 738$ a háromjegyű.

2. Egy 14 cm oldalú négyzet két átellenes sarkába beillesztettünk egy-egy kisebb négyzetet úgy, hogy két szomszédos oldaluk illeszkedik a nagy négyzet oldalaira.

   A kis négyzetek közül a nagyobb területe a kisebb területének 4-szerese. A két kis négyzetnek keletkezett közös része, ennek területe 1 cm^2. Mekkora a nagy négyzetnek a kicsik által le nem fedett területe?

   Első megoldás
   Jelölje x a legkisebb négyzet oldalát. Mivel a másik négyzet területe 4-szerese a kicsinek, ezért az oldala 2-szerese, azaz $2x$. A közös rész 1 cm^2 területű négyzet, így ennek oldala 1 cm-es. A legnagyobb négyzet oldalát megkapjuk a kisebbekből: $14 = x + 2x - 1$. Ebből a kisebb négyzetek oldala 5 cm és 10 cm. **(*)** A kisebb négyzetek területe 25 cm^2, és 100 cm^2. A két négyzet területe együtt 25+100-1 = 124 cm^2 (a közös rész levonásával). A kimaradó terület ezért $14 \cdot 14 - 124 = 196 - 124 = 72$ cm^2.

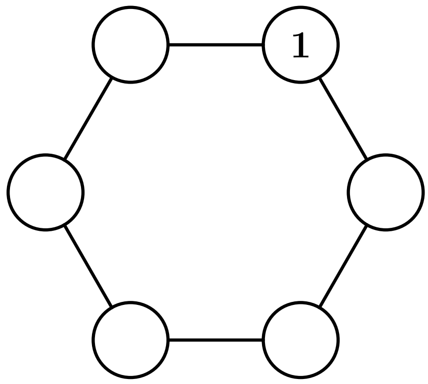
   Második megoldás
   (*)-tól folytatva: A nem színezett részek egyforma (egybevágó) téglalapok. A rövidebb oldal hossza $14 - 10 = 4$ cm, a hosszabbiké $14 - 5 = 9$ cm. A 2 téglalap együttes területe ezért $2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$ cm^2.

3. Belenéztünk a tanárok tolltartóiba, és a következőt figyeltük meg: mindegyikben tollak és ceruzák voltak, tollból is, és ceruzából is legalább egy. Minden darab fekete vagy piros színű, és minden tolltartóban van mindkét színből. Igaz-e, hogy mindegyik tolltartóban van két olyan íróeszköz, amelyik színben is, fajtában is különbözik?

Első megoldás
Válasszunk egy tollat és egy ceruzát (van mindkettő). (A gondolatmenet nyilván ugyanez lesz a színek, illetve a formák szerepcseréjével.)
Ha ezek különböző színűek, akkor készen vagyunk. Ha viszont egyformák, akkor van a tolltartóban a másik színből is egy íróeszköz. Ha ez toll, akkor az előbbi ceruzával, ha ceruza, akkor az előbbi tollal alkotnak megfelelő párt. Ugyanezt mondhatjuk bármelyik tolltartóról. A válasz tehát igen.

Második megoldás
Vegyünk a tolltartóból egy ceruzát (van benne). Ez piros vagy fekete. Legyen piros. (Feketével ugyanígy megy.)
Ha van fekete toll, készen vagyunk. Ha nincs, akkor minden toll piros, ezért a ceruzák közt kell lennie feketének, mert van fekete is a tolltartóban. Ugyanezt mondhatjuk bármelyik tolltartóról. A válasz tehát igen. (Ennél a gondolatmenetnél is felcserélhető a színek és formák szerepe.)

4. Egy hatszög csúcsaiba az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat írjuk, mindet pontosan egy csúcsba. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy minden csúcsba írt számra igaz, hogy vagy mindkét szomszédja nagyobb nála, vagy mindkettő kisebb?



Első megoldás
Betűzzük meg az 1-estől körüljárva a mezőket: $1, a, b, c, d, e$.
1 és 2 nem lehetnek szomszédok, mert 2-nél csak az 1 kisebb. A 2-t ezért csak két helyre tehetjük, az 1-gyel szembe (c), vagy az 1 másodszomszédjának (b, vagy d, de ez mindegy, mert tükrösek az 1-c átlóra - a tükröseket később számoljuk). I. eset: $b = 2$ (másodszomszéd) Most d szomszédai csak d-nél nagyobbak lehetnek, mert az egyiknek az 1, a másiknak a 2 a d-től különböző szomszédja. Így $d = 3$ vagy $d = 4$. Ha $d = 3$, akkor a másik 3 mezőre a $4, 5, 6$ számok minden lehetséges elhelyezése megfelel a feltételnek. Ilyen elhelyezés $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ van (nem elvárás, hogy szorzással számoljon, felsorolhat, rendezhet). Ha $d = 4$, akkor mellé már csak az $5, 6$ kerülhet, ezeket 2-féleképpen tehetjük le. II. eset: $c = 2$ Így a szomszédos b és a mezőknek van kisebb szomszédja, tehát mindkettőnek kisebbnek kéne lenni a másiknál, ami lehetetlen. Itt tehát nincs megoldás. Ez összesen 8 lehetőség, valamint ezek szimmetrikus párjai: $8 \cdot 2 = 16$ kitöltés.

Második megoldás
Az 1-estől körbehaladva egy kisebbet egy nagyobb, majd azt egy az előzőnél kisebb szám követi és így tovább. Azaz az elrendezés olyan, hogy ,,Nagy", ,,Kicsi", ,,Nagy", ,,Kicsi", ,,Nagy", ,,Kicsi". Az 1 és a 2 csak ,,Kicsi" lehet, mert nincs 2 darab kisebb szám náluk, az 5 és a 6 pedig csak ,,Nagy" lehet hasonló okból. A 3 lehet ,,Kicsi" vagy ,,Nagy": I. eset: a 3 ,,Kicsi". Az 1 rögzített, a 2 és a 3 kétféleképpen

helyezhető el. Ehhez a 4, 5, 6 számokat a maradék 3 helyre $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ féleképpen helyezhetjük el. Ez összesen $2 \cdot 6 = 12$ elhelyezés. II.eset: a 3 ,,Nagy". Ekkor a 3 csak az 1 és a 2 közé kerülhet, mert csak ezek kisebbek nála, tehát a 3 az 1 szomszédja - ami kétféleképp lehetséges. A fennmaradó 3 hely szomszédos, itt a 4 kerül középre, és az 5 és 6 helyet cserélhet. Itt tehát $2 \cdot 2 = 4$ újabb lehetőségünk van. Összesen 12+4=16.

5. Adott 5 pozitív egész szám, amelyeknek felhasználásával az összes lehetséges 3-tagú összeget elkészítettük. Így ezeket a számokat kaptuk:

$$10, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25.$$

Mi lehetett az eredeti 5 szám?

Első megoldás

Ha összeadjuk a számokat, akkor a keresett számok összegének 6-szorosát kapjuk, mivel minden szám 6 összegben szerepel. Így az eredeti számok összege $180 : 6 = 30$. Ezért ha az 5 szám közül háromnak az összegét tudjuk, akkor tudjuk a másik 2 szám összegét, hiszen a 30-ból csak ki kell vonnunk az eredeti háromtagú összeget. Ezek szerint az 5 szám közül bármelyik 2-nek az összege rendre:

$$20, 16, 15, 14, 13, 12, 10, 9, 6, 5.$$

Látható, hogy 4 páratlan számot kaptunk a kéttagú összegek között. Ez csakis abban az esetben lehetséges, ha az eredeti számok közül 1 páros, a többi 4 pedig páratlan. Mivel az az egy szerepel abban a négy darab összegben, aminek az értéke páratlan, csak ezzel a négy összeggel kell foglalkoznunk $(15, 13, 9, 5)$. Ha ezeket összeadjuk (42), akkor ebben az összegben 4-szer szerepel a páros számunk, és minden páratlan pontosan egyszer. Vagyis minden szám szerepel benne egyszer, és még a páros számunk pluszban háromszor. Mivel a számok összegét már ismerjük (30), így a páros számunk $42 - 30 = 12$-nek a harmada, azaz 4. Mivel a 4-nek a többivel alkotott összegei rendre a korábbiak értelmében $15, 13, 9, 5$, így a többi szám azonnal adódik: $11, 9, 5, 1$. Ezt könnyen le is ellenőrizhetjük.

Második megoldás

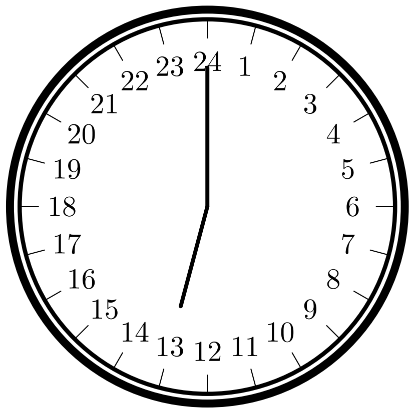
A hat szám összege 30 (ld. első megoldás). Növekvő számsorrendben jelöljük a számokat: a, b, c, d, e. A legnagyobb összeg a három legnagyobb szám összege, a legkisebb pedig a három legkisebbé. Mivel e két összegben csak a középső szám közös, ezeket összeadva kétszer számoljuk a középsőt. Ha tehát levonjuk az 5 szám összegét, megkapjuk a középső számot: $10 + 25 - 30 = 5$. A középső szám tehát 5, azaz $c = 5$. $a + b + c = 10$ miatt $a + b = 5$, innen a két ,,kicsi" szám lehet 1 és 4, vagy 2 és 3. Ha $a = 2$ és $b = 3$, akkor $d + e = 30 - 10 = 20$ miatt $d + e + b = 23$, ami nem szerepel az összegek között, ez tehát nem ad megoldást. A másik eset $a = 1$ és $b = 4$. A $d + e = 20$ miatt most d és e lehetnek $(6; 14), (7; 13), 8; 12)$ vagy $(9; 11)$. Ezek közül az első kettővel nem áll elő a 18 összegként, a harmadikkal pedig a 17. A $(9; 11)$ páros jó, a számok tehát: $1, 4, 5, 9, 11$.

44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő, 2. nap - 2015. május 30.

ÖTÖDIK OSZTÁLY - Megoldások

1. Anna és András hosszú ideje arról álmodozik, hogy kapnak egy-egy 24 órás beosztású mutatós órát.



Tibi bácsi, az ismerős órásmester meglepi őket egy-egy ilyen órával. Anna órája kétszer olyan gyorsan jár, mint ahogy kellene, de szerencsére a megfelelő irányban. A másik tökéletes tempóban jár, viszont visszafelé. 13:00-kor mindkét óra a pontos időt mutatja. Mikor mutatják legközelebb ugyanazt az időt?

Megoldás

Amikor legközelebb ugyanazt az időt mutatják, addigra a két kismutató együtt egy teljes kört tesz meg, azaz 24 órát jár be. Anna órája a megfelelő irányban kétszer annyit tesz meg, mint amennyit András órája a helytelen irányban. Ez azt jelenti, hogy Anna órájának kismutatója kétszer annyi órát jár be, mint Andrásé. Azaz a 24 órát három egyenlő részre kell felosztanunk, ebből két rész a gyorsabb óráé. Ezért 16 óra a gyorsabbé és 8 óra a lassabbé. Anna órája tehát 16 órát halad a rendes irányba, Andrásé pedig az ellenkező irányba 8 órát. (Mivel 13 órától indultak el, így 13-8=5 óránál találkoznak.) Tehát 8 óra telik el a legközelebbi találkozásig, így ekkor a pontos idő: 21.00.

2. Négy ötödikes diák a matekszakkörön a következő feladvánnyal lepte meg a többieket: tegnap megmértük mind a négyünk súlyát. Minden mérés után kiszámítottuk az addigi mérések átlagát, és azt tapasztaltuk, hogy minden mérés után az átlag 1-gyel nőtt. Mennyivel nehezebb közülünk a legnehezebb a legkönnyebbnél? (Egy szám átlaga saját maga, két szám átlaga a két szám összegének fele, három szám átlaga a három szám összegének harmada, négy szám átlaga pedig a négy szám összegének negyede.)

Első megoldás

Az világos, hogy a gyerekek nehezedő sorrendben mérték meg magukat, hiszen az átlaguk csak így nőhet. Legyenek a gyerekek fiktív módon elnevezve nehezedő sorrendben: A, B, C, D. Az első mérés után az átlag A tömegével egyezik meg. A második mérés után az átlag úgy tud 1 kg-mal nőni, ha B tömege 1 kg-mal több az új átlagnál, azaz 2 kg-mal több A-nál. Jön a harmadik gyerek, akinek a megmérése után az átlag ismét 1 kg-mal több lesz, azaz éppen B tömegével lesz egyenlő. Mivel ekkor 2 kg-mal több az átlag A tömegénél, B tömegével egyenlő, így C éppen 2 kg-mal nehezebb, mint az átlag, azaz

4 kg-mal nehezebb A-nál, és 2 kg-mal B-nél. Az utolsó mérés után az átlag ismételten nő 1 kg-mal, azaz A tömegénél 3 kg-mal, B tömegénél 1 kg-mal lesz több, C tömegénél pedig 1 kg-mal lesz kevesebb. Így D tömege 3 kg-mal több C-nél, ami azt jelenti, hogy A-nál, azaz a legkönnyebbnél a D 6 kg-mal nehezebb.

Második megoldás

Csak úgy növekedhet az átlag, ha nehezedő sorrendben mérték meg a tömegüket. Ha az emberek tömegének mérőszámait egyszerre ugyanannyival csökkentjük vagy növeljük, akkor az átlag is ugyanezzel az értékkel csökken vagy nő. Tehát akármilyen tömegértéket adhatunk a legkönnyebb gyereknek, a többiek rendre ugyanannyival lesznek nehezebbek a könnyebbeknél. Legyen ez a tömegérték az egyszerűség kedvéért 0. Ezután könnyű számolással jönnek a többi értékek: 2, 4, 6. Tehát a legnehezebb 6 kilóval nehezebb a legkönnyebbnél.

3. Peti egy 4×4-es táblázatot kitöltött számokkal. Elárulta, hogy egy szám jobb oldali szomszédja mindig ugyanannyival nagyobb az eredetinél, de nem mondta meg, hogy mennyivel. Azt is elmondta, hogy egy szám alsó szomszédja mindig ugyanannyival nagyobb az eredetinél, de itt sem árulta el, hogy mennyivel. Az 1. sor 1. mezőjébe (bal felső sarok) 7, a 3. sor 4. mezőjébe 33, a 4. sor 2. mezőjébe 32 került. Milyen számokat írt Peti a táblázat többi mezőjébe?

Első megoldás

A jobbra lépés növekedése legyen J, a lefelé pedig L. A jobb alsó mezőre lépjünk a 32-ből és a 33-ból: $32+2J = 33+L$, azaz $L = 2J-1$. Most a 7-ből jussunk el a 32-be: $32 = 7+J+3L = 7+J+6J-3 = 7J+4$, ahonnan $J = 4$ adódik, onnan pedig $L = 7$. A táblázat így:

7	11	15	19
14	18	22	26
21	25	29	33
28	32	36	40

Második megoldás

A 32-ről a 33-ra lólépésben jutunk (2 jobbra, 1 felfelé). Ezt a lépést alkalmazva minden esetben ugyanannyival változik az összeg,

7							35
					34		
			33				
	32						

ezért ilyen lépésekkel haladva a 32, 33, 34, 35 számokra lépünk, ezzel az első sorba jutottunk. A 35 a 32-től a 3. lépés, tehát jobbra $3 \cdot 2 = 6$ mezőt haladtunk. a 7-től pedig 7-et. Emiatt a jobbra lépés értéke +4. Ebből a lefelé lépés értéke +7. Ezekkel az értékekkel számolva 7-ről a 33-ra is eljutunk, és kapjuk a fenti táblázatot.

4. Egy vonalzóról lekopott a jelek egy része, mindössze öt darab, egész centimétert jelölő beosztás maradt meg: ezek növekvő sorrendben 0, a, b, c és d centimétert jelölnek. Ennek ellenére a vonalzóval 1-től d-ig bármilyen egész centiméteres távolságot *közvetlenül* le tudunk mérni. (Egy távolságot akkor tudunk *közvetlenül* lemérni, ha van a vonalzónak két beosztása, amelyek távolsága éppen ekkora.) Tudjuk, hogy az utolsó beosztásnak, d-nek az értéke 6-nál nagyobb. Készíts ilyen vonalzókat minél több különböző d

értékkel! (Nem kell indokolni, hogy az általad megadottnál többféle d érték nem lehetséges. Azt viszont indokolni kell, hogy az általad megadott vonalzó megfelel a feltételeknek.)

Megoldás

A $d = 7$-re egy lehetséges konstrukció: $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ és $d = 7$. Mérések: 1-et a 0 és a között, 2-t a 0 és b között, 3-at a és c között, 4-et 0 és c között, 5-öt b és d között, 6-ot a és d között, végül 7-et 0 és d között. A $d = 8$-re egy lehetséges konstrukció: $a = 1$, $b = 4$, $c = 6$ és $d = 8$. Mérések: 1-et a 0 és a között, 2-t a b és c között, 3-at a és b között, 4-et 0 és b között, 5-öt a és c között, 6-ot 0 és c között, 7-et a és d között, végül 8-at 0 és d között. A $d = 9$ a lehetséges maximum, ez elérhető az $a = 1$, $b = 4$, $c = 7$ és $d = 9$ beosztásokkal.

Mérések: 1-et a 0 és a között, 2-t a c és d között, 3-at a és b között, 4-et 0 és b között, 5-öt b és d között, 6-ot a és c között, 7-et 0 és c között, 8-at a és d között, végül 9-et 0 és 9 között.

44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő, 1. nap - 2015. május 29.

HATODIK OSZTÁLY - Megoldások

1. Belenéztünk a tanárok tolltartóiba, és a következőt figyeltük meg: mindegyikben tollak voltak és ceruzák, tollból is, és ceruzából is legalább egy. Minden darab fekete vagy piros színű, és minden tolltartóban van mindkét színből. Igaz-e, hogy mindegyik tolltartóban van két olyan íróeszköz, amelyik színben is, fajtában is különbözik?

Első megoldás
Válasszunk egy tollat és egy ceruzát (van mindkettő). (A gondolatmenet nyilván ugyanez lesz a színek, illetve a formák szerepcseréjével.)
Ha ezek különböző színűek, akkor készen vagyunk. Ha viszont egyformák, akkor van a tolltartóban a másik színből is egy íróeszköz. Ha ez toll, akkor az előbbi ceruzával, ha ceruza, akkor az előbbi tollal alkotnak megfelelő párt. Ugyanezt mondhatjuk bármelyik tolltartóról. A válasz tehát igen.

Második megoldás
Vegyünk a tolltartóból egy ceruzát (van benne). Ez piros vagy fekete. Legyen piros. (Feketével ugyanígy megy.)
Ha van fekete toll, készen vagyunk. Ha nincs, akkor minden toll piros, ezért a ceruzák közt kell lennie feketének, mert van fekete is a tolltartóban. Ugyanezt mondhatjuk bármelyik tolltartóról. A válasz tehát igen. (Ennél a gondolatmenetnél is felcserélhető a színek és formák szerepe.)

2. Egy taxis cég könnyen megjegyezhető telefonszámot szeretne, ezért úgy döntenek, hogy legfeljebb kétféle számjegyet fognak használni. Az kötelező érvényű, hogy egy taxitársaság telefonszáma csak 3-assal kezdődhet, és csakis 6-jegyű lehet. Hány különböző lehetőségből választhatnak?

Első megoldás
Legyen x a másik számjegy, feltéve hogy nem csupa 3-asból áll a szám. Az első jegy kötelezően 3. Ha rögzítjük a másik lehetséges számjegyet, akkor a következő 5 jegy mindegyike 3 vagy x ($\neq 3$) lehet. Ez $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ lehetőség. **(*)** A csupa hármas számjegyet tartalmazót külön vesszük, így marad 31 olyan eset, amikor 3 és x is szerepel. Mivel x értéke lehet $0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, ami 9 lehetőség, ezért összesen $9 \cdot 31 + 1 = 280$ lehetőség közül választhat a társaság.

Második megoldás
(*)-tól folytatva: A másik számjegy 9-féle lehet, ami $9 \cdot 32$ lehetőség. Ekkor azonban a csupa hármast minden számjegynél megszámoltuk, pedig csak egyszer akartuk. Vagyis 8-cal többször számoltuk, mint akartuk. Ezért összesen $9 \cdot 32 - 8 = 280$ lehetőség van a telefonszám megválasztására.

Harmadik megoldás
Csoportosítsuk a lehetséges telefonszámokat aszerint, hogy hányadik helyen fordul elő először a nem 3-as számjegy. Az első helyen 9 lehetőség közül választhatunk, hiszen bármely nem 3-as számjegy lehet az első. Az ezt követő helyeken mindig két választásunk lesz, hiszen vagy 3-at vagy a választott egyéb számjegyet használhatjuk. Ha a második számjegy lesz 3-astól különböző, akkor $9 \cdot 2^4 = 144$ eset van, ha a harmadik, akkor $9 \cdot 2^3 = 72$ eset. Ha a negyedik számjegy lesz 3-astól különböző, akkor $9 \cdot 2^2 = 36$ eset van, ha az ötödik, akkor $9 \cdot 2 = 18$ eset, ha pedig csak az utolsó számjegy más, akkor 9. 1 esetben pedig nem lesz más számjegy csak a 3-as, amikor a 333333 a telefonszám. Ez összesen: $144 + 72 + 36 + 18 + 9 + 1 = 280$ lehetőség közül választhat a társaság.

Negyedik megoldás
Számoljuk meg a telefonszámokat annak alapján, hogy hány 3-astól különböző jegyet tartalmaz. Egyedül a 333333 olyan, amiben nincs más számjegy. Ha egyetlen 3-astól különböző számjegy van, akkor az 5 helyen lehet (az első számjegy biztosan 3-as), a számjegy lehet 9 féle, így összesen 45 ilyen szám van. Ha kettő 3-astól különböző van, akkor az egyik ilyen jegy 5 helyen lehet, a másik 4 helyen, ami $5 \cdot 4$ lehetőség, de így mindent kétszer számoltunk, hiszen a választás sorrendje nem számít. A két 3-astól különböző számjegy tehát 10 helyen lehet, a számjegy pedig 9 féle, így összesen 90 ilyen szám van. Ha három 3-astól különböző jegy van, akkor pontosan két 3-as van az első számjegyet leszámítva, ez a két hármas ugyanúgy 10 helyen lehet, a másik számjegy pedig továbbbra is 9 féle lehet, így ilyen számból is 90 van. Ugyanez a helyzet, ha négy 3-astól különböző van, ilyenből tehát 45 van, és 9 olyan szám van, amikor az mind az öt számjegy 3-astól különböző. Ez összesen $1 + 45 + 90 + 90 + 45 + 9 = 280$.

3. Az
$$1! + 2! + 3! + ... + 49!$$
számnak mi a tízes számrendszerbeli utolsó két számjegye? (Ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.)

Megoldás
Az összeg utolsó két számjegyét egyértelműen meghatározza az összeadandók utolsó két számjegye. A 10!-tól kezdve minden faktoriális osztható 100-zal (2, 5 és 10 szerepel a szorzatban), így utolsó két számjegyük 00. Ezért elég az $1!+2!+\ldots+9!$ összeget vizsgálni. Az összeadandók utolsó két számjegye: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = \ldots 20$, $6! = \ldots 20$, $7! = \ldots 40$, $8! = \ldots 20$, $9! = \ldots 80$. Ezek összege $\ldots 13$-ra végződik. Így az eredeti szám utolsó két számjegye is **13**.

4. Egy táblán mindig egyetlen szám látható, kezdetben ez a szám az 1. Egy lépésben a táblán lévő számot növelhetjük 1-gyel, vagy a reciprokát vehetjük. Mutasd meg, hogy elérhető a fenti lépések alkalmazásával, hogy a táblán a 7/2015 legyen látható.

Megoldás
Gondolkodjunk visszafelé! A 7/2015 előállításhoz elég a $\frac{2015}{7} = 287\frac{6}{7}$-et előállítani. Ezt megkaphatjuk az 1-gyel növelés ismételt alkalmazásával a $\frac{6}{7}$-ből. Ez utóbbihoz elég a $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$-ot előállítani. Ezt pedig megkaphatjuk 1-gyel növeléssel az $\frac{1}{6}$-ból. Az 1-et 5-ször megnövelve, majd a reciprokát véve megkapjuk az $\frac{1}{6}$-ot, tehát elérhető, hogy a 7/2015 legyen a táblán.

5. 124 fekete és 1 piros kis kockából hány különböző $5 \times 5 \times 5$-ös kocka építhető, ha csak a nagy kocka felszíne alapján tudjuk megkülönböztetni a kockákat, és a forgatással egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek?

Megoldás
Ha kocka csúcsánál van piros kis kocka, akkor ez összesen egyféleképpen lehetséges, mert a különböző csúcsok egymásba forgathatók. Ha a kocka élén van piros kis kocka, de nem a csúcsnál, akkor az összesen kétféleképpen lehetséges. Vagy az él középső kis kockája piros, vagy pedig a csúcs melletti. Ezek külön-külön mind egymásba forgathatók. Ha egy lap belső részén van piros kis kocka, akkor az háromféleképpen lehetséges. 1) A lap közepén. 2) A lap középső kis kockája és a csúcsnál lévő kis kocka között. 3) A lap középső kis kockája és az egyik él középső kis kockája között. Elképzelhető, hogy a kocka belsejében van a piros, vagyis a felület teljesen fekete. Ez 1 eset. Összesen tehát $1+2+3+1 = 7$ különböző kinézetű kocka képzelhető el.

44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő, 2. nap - 2015. május 30.

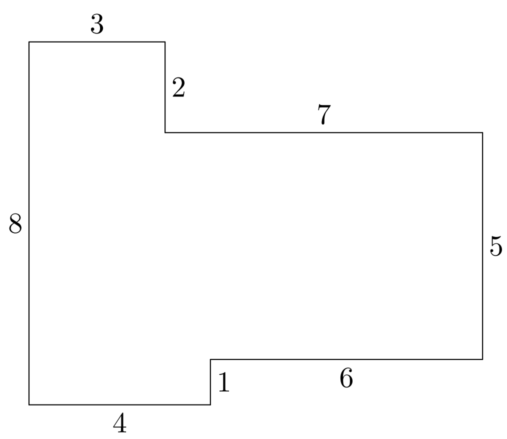
HATODIK OSZTÁLY - Megoldások

1. Felírtuk a táblára az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$ számokat, majd közéjük a ,,+" és ,,-" műveleti jeleket tettük kedvünk szerint.
Lehet-e az eredmény 0?

Megoldás
Hozzuk közös nevezőre az összeget. A közös nevező $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ lesz. Az $\frac{1}{8}$-nak megfelelő tag számlálója páratlan lesz, hiszen a közös nevező nem osztható 8-nál nagyobb kettő-hatvánnyal. A többi tag számlálója viszont páros lesz, hiszen nincs más 8-cal osztható nevező. A számlálók között tehát pontosan egy páratlan szám szerepel, ami azt jelenti, hogy a számláló biztosan páratlan. Így nem lehet 0, ezért az egész összeg sem lehet 0.

2. Egy n oldalú sokszögről tudjuk, hogy bármely két szomszédos oldala merőleges egymásra, és oldalainak hossza $1, 2, \ldots, n$ egység (nem feltétlenül ebben a sorrendben). Mennyi az n lehetséges legkisebb értéke?

Megoldás
Az n értéke csak páros lehet, hiszen felváltva lesznek ,,függőleges" és ,,vízszintes" oldalai. Arra is szükségünk van még, hogy az $1, 2, \ldots, n$ számokat két egyenlő elemszámú részre lehessen osztani úgy, hogy a részek mindegyike két egyenlő összegű csoportra osztható. Ez szükséges feltétel, hiszen a két nagy csoportot a ,,függőleges" és a ,,vízszintes" oldalak adják, és már megállapítottuk, hogy a ,,vízszintes" és ,,függőleges" oldalak száma egyenlő. Kell azonban az is, hogy a ,,vízszintes" oldalakon belül a ,,balra" haladó oldalak (egy kijelölt körüljárás szerint) ugyanolyan összhosszt adjanak, mint a ,,jobbra" haladók. Ennek az az oka, hogy a sokszögnek záródnia kell. (Ugyanez igaz a ,,függőlegeseknél" a ,,felfelé" és ,,lefelé" haladó oldalakra.) Ez utóbbi miatt az is szükséges, hogy az $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ összeg páros legyen. Nézzük a páros n-eket. Az $n = 4$ nem jó, mert bár az összeg 10, de nem lehet egyenlő összegekre bontani a két nagy csoportot, hiszen azokban csak egy-egy szám szerepelhetne. Az $n = 6$ esetén az $1 + 2 + \cdots + 6$ összeg páratlan. Az $n = 8$ teljesít minden feltételt, és több ilyen sokszög is létezik. Egy lehetséges konstrukció az alábbi:



3. Egy számmisztikával foglalkozó klub tagjai az $1, 2, 3, \ldots, 11$ számok közül némelyik számot szerencsésnek, a többit szerencsétlennek nevezik. A következőket árulták el a számaikról:

   - Ha egy szám szerencsés, akkor az őt összegben 12-re kiegészítő szám is szerencsés.
   - Ha egy szám szerencsés, akkor az osztói is szerencsés számok.
   - Van páros szerencsés szám.
   - A szerencsétlen számok száma is szerencsétlen szám.

   Határozd meg, hogy melyek a szerencsés számok!

   Megoldás
   Mivel van páros szerencsés szám, ennek osztója az 1 és a 2, így ezek mindenképp szerencsés számok. Ebből következően a $12 - 2 = 10$ és a $12 - 1 = 11$ is szerencsés. Mivel 10-nek osztója, ezért az 5 is szerencsés, emiatt viszont a $12 - 5 = 7$ is az. Ekkor legfeljebb 5 darab szerencsétlen szám maradt. Mivel az 1, 2, 5 szerencsés számok, ezért szerencsétlen számból csak 3 vagy 4 darab lehet. Ha a 6 szerencsés lenne, akkor emiatt a 3 és emiatt a 9 is az lenne, vagyis 3-nál kevesebb szerencsétlen szám lenne, ami lehetetlen. Így a 6 szerencsétlen. A 4 és a 8, valamint a 3 és a 9 mindenképp együtt szerencsések vagy szerencsétlenek. Így a szerencsétlen számok száma csak 3 lehet. Ekkor viszont a 3 (és a 9) szerencsétlenek, tehát a 4 és a 8 szerencsések. Azaz a szerencsés számok: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11.

4. Egy vonalzóról lekopott a beosztások jelentős része, csak a $0, a, b, c, d$ centimétert jelző vonalak láthatóak, ahol $0 < a < b < c < d$ egész számok. Mekkora az a legnagyobb d érték, amelyre a vonalzóval 1-től d-ig minden egész centiméteres távolságot *közvetlenül* le tudunk mérni? Bizonyítsd az állításod! (Egy távolságot akkor tudunk *közvetlenül* lemérni, ha van a vonalzónak két beosztása, amelyek távolsága éppen ekkora.)

   Megoldás
   A következő távolságokat tudjuk mérni:

$$a, b, c, d, b - a, c - b, d - c, c - a, d - b, d - a.$$

   Ez legfeljebb 10 különböző érték, tehát $d \leq 10$. A $d = 10$ azt jelentené, hogy a fenti értékek mind különböznek. Így a beosztások közötti különbségek is mind mások. Vagyis a szomszédos beosztások közötti különbségek éppen az $1, 2, 3, 4$ számok. Ha ugyanis lenne közöttük legalább 5, akkor az összegük legalább $1 + 2 + 3 + 5 = 11$ lenne. Az 1 különbség nem kerülhet sem a 2, sem a 3 mellé, mert akkor a 3, illetve a 4 kétféleképpen is mérhető lenne. Vagyis az 1 különbség csak a szélén lehet, mégpedig úgy, hogy a 4 különbség követi.
   Ekkor azonban a 2 és a 3 is egymás mellé kerül, így az 5 kétféleképpen is mérhető lesz. ($1+4 = 2+3 = 5$.)
   A $d = 9$ elérhető az $a = 1$, $b = 4$, $c = 7$ és $d = 9$ beosztásokkal. Mérések: 1-et a 0 és a között, 2-t a c és d között, 3-at a és b között, 4-et 0 és b között, 5-öt b és d között, 6-ot a és c között, 7-et 0 és c között, 8-at a és d között, végül 9-et 0 és 9 között.

44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő, 1. nap - 2015. május 29.

HETEDIK OSZTÁLY - Megoldások

1. Az

$$1! + 2! + 3! + ... + 49!$$

számnak mi a tízes számrendszerbeli utolsó két számjegye? (Ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.)

Megoldás

Az összeg utolsó két számjegyét egyértelműen meghatározza az összeadandók utolsó két számjegye. A 10!-tól kezdve minden faktoriális osztható 100-zal (2, 5 és 10 szerepel a szorzatban), így utolsó két számjegyük 00. Ezért elég az $1! + 2! + \ldots + 9!$ összeget vizsgálni. Az összeadandók utolsó két számjegye: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = \ldots 20$, $6! = \ldots 20$, $7! = \ldots 40$, $8! = \ldots 20$, $9! = \ldots 80$. Ezek összege $\ldots 13$-ra végződik. Így az eredeti szám utolsó két számjegye is **13**.

2. Pisti a síkot 100 különböző egyenessel felosztotta tartományokra, majd beszínezte az ábráján a sokszögeket. Hány olyan tartomány jöhetett létre, amelyet Pisti nem színezett be? Mutass példát minden lehetőségre, és bizonyítsd, hogy más nem lehet a nem színezett tartományok száma.

Első megoldás

Ha az összes egyenes párhuzamos egymással, akkor 101 tartomány keletkezik, amelyek egyike sem sokszög. Ha 99 párhuzamos egyeneshez teszünk 1 metsző egyenest, akkor 200 tartomány keletkezik, amelyek egyike sem sokszög. Megmutatjuk, hogy más lehetőség nincs a nem sokszög alakú részek számára. Mivel a csupa párhuzamos esetét már vizsgáltuk, tegyük fel, hogy van az egyenesek között két metsző. Belátjuk, hogy a keletkező tartományok közül pontosan 200 nem sokszög. Minden egyenesen keletkezik metszéspont, hiszen ha valamelyiken nem lenne, az azt jelentené, hogy az összes többi egyenes vele párhuzamos. Emiatt bármelyik egyenest a metszéspontok két félegyenesre, és köztük néhány (esetleg 0) szakaszra vágnak szét. Így összesen 200 félegyenes keletkezik. A nem sokszög alakú tartományok éppen azok, amelynek határoló alakzatai között félegyenes is található, méghozzá pontosan kettő. Minden félegyenes pontosan két (nem sokszög) tartományt határol. Így a nem sokszög alakú tartományok száma megegyezik a félegyenesek számával, vagyis 200-zal.

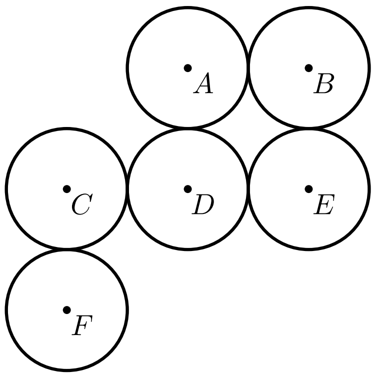
Második megoldás

Tegyük fel, hogy vannak az egyenesek között metszők. Ekkor bármely egyenesen van metszéspont, hiszen ha az egyiken nem lenne, akkor az összes egyenes párhuzamos lenne vele. Vegyünk egy olyan kört, amely a belsejében tartalmazza az egyenesek összes metszéspontját. A körvonal minden olyan tartományba belemetsz, ami nem sokszög, és csakis azokba (hiszen a sokszögek a belsejében vannak). A kört mindegyik egyenes két pontban metszi, így rajta 200 körív keletkezik. Egy ilyen körív végpontjai vagy egy egyenesen vannak, vagy két metsző egyenesre illeszkednek, vagy két párhuzamos egyenesre illeszkednek. Utóbbi esetben van olyan egyenes, ami mindkét párhuzamost metszi. Mivel metszéspontok csak a kör belsejében lehetnek, az így adódó egy, két vagy három egyenes elválasztja a körívet az összes többi körívtől. Így bármely két körív különböző tartományban van, tehát 200 olyan tartomány van, ami nem sokszög. Ha pedig minden egyenes párhuzamos, akkor 101 tartomány keletkezik, amelyek egyike sem sokszög. Így 101 vagy 200 ilyen tartomány van.

3. Egy táblán mindig egyetlen szám látható, kezdetben ez a szám az 1. Egy lépésben a táblán lévő számot növelhetjük 1-gyel, vagy a reciprokát vehetjük. Mutasd meg, hogy elérhető a fenti lépések alkalmazásával, hogy a táblán a 17/2015 legyen látható.

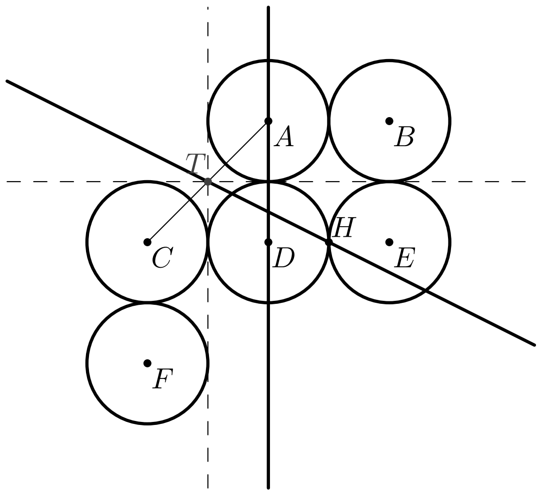
Megoldás
Gondolkodjunk visszafelé! A 17/2015 előállításhoz elég a $\frac{2015}{17} = 118\frac{9}{17}$-et előállítani. Ezt megkaphatjuk az 1-gyel növelés ismételt alkalmazásával a $\frac{9}{17}$-ből. Ez utóbbihoz elég a $\frac{17}{9} = 1\frac{8}{9}$-et előállítani. Ezt pedig megkaphatjuk 1-gyel növeléssel a $\frac{8}{9}$-ből. Ehhez elég a $\frac{9}{8}$-ot előállítani, amely 1-gyel növeléssel kapható az $\frac{1}{8}$-ból. Az 1-et 7-szer megnövelve, majd a reciprokát véve megkapjuk az $\frac{1}{8}$-ot, tehát elérhető, hogy a 17/2015 legyen a táblán.

4. Adott 6 egységsugarú körlap, melyek az alábbi ábra szerint érintik egymást.



Szerkesztendő két különböző egyenes, amelyek mindegyike felezi a 6 körlapból álló alakzat területét. Írd le a szerkesztés menetét. A szerkesztést nem kell végrehajtani, de indokolni kell, hogy a kapott egyenesek miért felezik az alakzat területét.

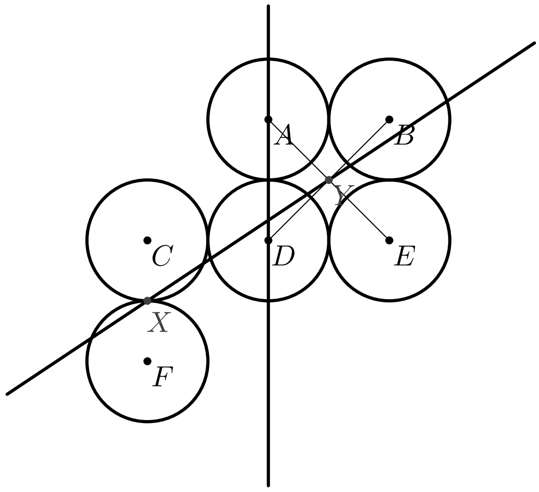
Első megoldás



Az AD egyenes nyilvánvalóan felezi az alakzat területét. Az DE szakasz, valamint az D és E középpontú körök közös pontja legyen H. Ez a pont az említett két körből álló alakzatnak szimmetria-középpontja.

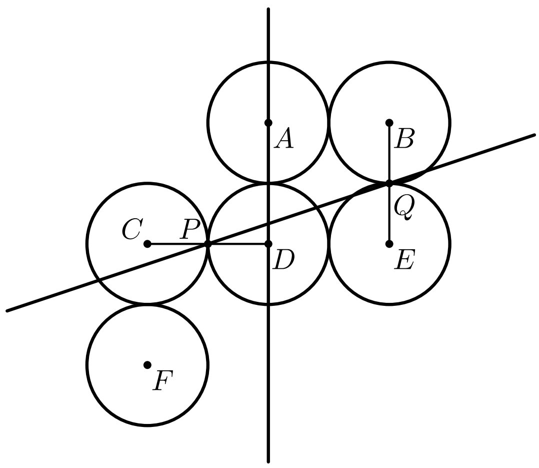
Így az H-n áthaladó egyenesek felezik ennek a két körnek a területét. Legyen az AC szakasz felezőpontja T. Ez a pont az A és C középpontú körökből álló alakzat szimmetriaközéppontja, így a rajta áthaladó egyenesek felezik ennek a két körnek a területét. A HT egyenes elválasztja egymástól a B és F középpontú köröket, hiszen az őket tartalmazó negyedsíkokat is elválasztja (szaggatott egyenesek). Így a HT egyenes mindhárom körpárt két egyenlő területű részre osztja, tehát felezi a hat körből álló alakzat területét.

Második megoldás



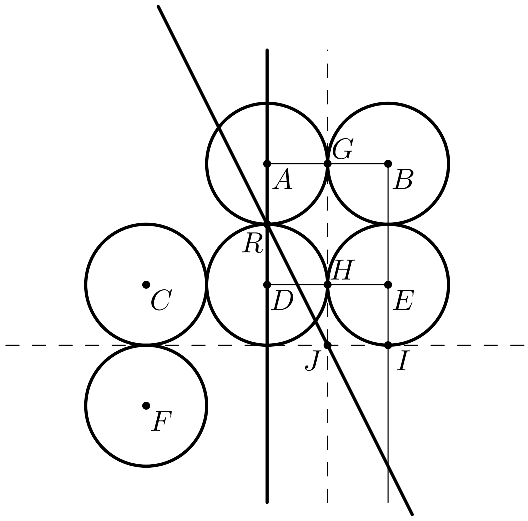
Az AD egyenes nyilvánvalóan felezi az alakzat területét. Az CF szakasz, valamint az C és F középpontú körök közös pontja legyen X. Ez a pont az említett két körből álló alakzatnak szimmetria-középpontja. Így az X-en áthaladó egyenesek felezik ennek a két körnek a területét. Legyen az AE és a BD szakaszok metszéspontja Y. Ez a pont az A, B, D, E sugarú körökből álló alakzatnak a szimmetria-középpontja. Így az Y-on áthaladó egyenesek felezik a fenti 4 körből álló alakzatnak a területét. Mivel az XY egyenesre mindkét felezési tulajdonság teljesül, ezért ez az egyenes felezi a hat körből álló alakzat területét.

Harmadik megoldás



Az AD egyenes nyilvánvalóan felezi az alakzat területét. A CD szakasz, valamint a C és D középpontú körök közös pontja legyen P. Ez a pont az említett két körből álló alakzatnak szimmetria-középpontja. Így az P-n áthaladó egyenesek felezik ennek a két körnek a területét. A BE szakasz, valamint a B és E középpontú körök közös pontja legyen Q. Ez a pont pedig ennek a két körből álló alakzatnak szimmetria-középpontja. Így a Q-n áthaladó egyenesek felezik ennek a két körnek a területét. A PQ egyenes tehát mind a C és D, mind a B és E középpontú körök területét felezi, és nyilvánvaló, hogy az A és F középpontú körök az egyenes különböző oldalán vannak, így a PQ egyenes felezi a 6 körből álló alakzat területét.

Negyedik megoldás



Az AD egyenes nyilvánvalóan felezi az alakzat területét. Az AD szakasz, valamint az A és D középpontú körök közös pontja legyen R. Ez a pont az említett két körből álló alakzatnak szimmetria-középpontja. Így az R-en áthaladó egyenesek felezik ennek a két körnek a területét. Ha olyan egyenest húzunk R-en át, amelynek egyik oldalán lesznek teljes egészében a B és E, a másikon a C és F középpontú körök, akkor ez az felezi a 6 körből álló alakzat területét. Egy ilyen egyenes szerkesztése: az AB szakasz segítségével megkapható az A és B középpontú körök érintési pontja (G), ugyanígy a DE szakasszal a D és E középpontú körök érintési pontja (H). A BE félegyenes és az E középpontú kör B-től távolabbi metszéspontja legyen I. Az I-ből GH egyenesre állított merőleges talppontja legyen J. Ekkor az RJ egyenes nyilvánvalóan megfelelő.

5. Két rabló a következő módon osztozkodik a zsákmányolt aranytallérokon: „1 neked, 2 nekem, 3 neked, 4 nekem stb.”, amíg az aranytallérokból futja. A végén a soron következő rabló megkapja a maradék aranytallérokat. Tudjuk, hogy 1000 aranytallérnál kevesebb volt a zsákmányuk, és azt is, hogy az osztozkodás végén mindkét rabló egyforma számú aranytallért kapott. Legfeljebb hány aranytallér lehetett a zsákmány?

Első megoldás

Mivel egy lépéspárban a második rabló mindig 1-gyel több tallért kap, $2k$ számú teljes lépés után k-val több aranya van. Az utolsó (csonka) lépéspár innen kétféleképp adhat egyenlőséget: vagy az első kap k darabot és ezzel vége, vagy az első kap $2k+1$-et és a második $k+1$-et. Az első esetben

$$1+2+...+2k+k=\frac{(2k+1)2k}{2}+k=(2k+1)k+k=2k(k+1)$$

a tallérok száma, a második esetben pedig

$$1+2+...+2k+1+k+1=\frac{(2k+2)(2k+1)}{2}+k+1=(k+1)(2k+1)+k+1=2(k+1)(k+1).$$

A $2k(k+1)$ alakú számokból 1000 alatt a $2\cdot21\cdot22=924$ a legnagyobb, a $2(k+1)(k+1)$ alakúakból pedig a $2\cdot22\cdot22=968$. Tehát legfeljebb 968 tallér lehetett a zsákmány.

Második megoldás

Nevezzük A-nak a rablót, aki 1 aranytallért kap, B-nek a másikat. Kétféle módon állhat elő a feladatban leírt helyzet: vagy mindkét rabló n-szer kap aranytallért, és A kapja a maradékot, vagy A n-szer, B $n-1$-szer kap aranytallért, és B kapja a maradékot. Az első esetben B zsákmánya $2+4+6+...+2n=n(n+1)$ aranytallér. Ez az eset meg is valósulhat, mert a maradék, ami A-nak jut, $2+4+6+...+2n-(1+3+...+2n-1)=n$, ami kevesebb, mint $2n+1$. Ekkor a a zsákmány $2n(n+1)$ aranytallér, melynek legnagyobb lehetséges 1000-nél kisebb értéke a 924 ($n=21$ esetén). A második esetben A zsákmánya $1+3+...+2n-1=n^2$ aranytallér. A B-nek jutó maradék $1+3+...+2n-1-(2+4+...+2n-2)=n$, és ez lehetséges, mert kevesebb, mint $2n$. Ekkor a teljes zsákmány $2n^2$, melynek legnagyobb lehetséges 1000-nél kisebb értéke 968 ($n=22$ esetén). Tehát a feladat kérdésére a válasz: 968 aranytallér.

Harmadik megoldás a versenyzők dolgozatai alapján

Nézzük meg, hány teljes körből állhatott az osztozkodás. 43 teljes kör esetén a teljes körök végén az első rabló $1+3+...+43=22^2=484$ aranyat kapott, a második rabló pedig könnyen látható módon 22-vel kevesebbet, azaz 462 aranyat. Az egyenlőséghez a második rablónak még 22 aranyat kell kapnia, ami lehetséges, mert a teljes kör 44 aranyból állna. Ez összesen 968 arany. Ha legfeljebb 42 teljes kör volt, a kiosztott aranyak száma kevesebb, mint 1+2+...+43=484+462=946. Ha legalább 44 teljes kör volt, akkor a második rabló legalább 2+4+...+44=506 aranyat kapott, és mivel az elsőnek is legalább ennyit kellett kapnia, így összesen 1000-nél több aranyat kaptak, ami kizárt. Így a feladat kérdésére a válasz: 968 aranytallér.

Negyedik megoldás a versenyzők dolgozatai alapján

Az aranytallérok száma akkor a lehető legnagyobb, ha az osztozkodási lépések száma is a lehető legnagyobb. Tegyük fel, hogy n lépés történik, ahol az utolsónál már nem feltétlenül kap pontosan n tallért (csak k-t) a soron következő. Ekkor a kiosztott aranyak száma

$$1+2+\ldots+n-1+k=\frac{n(n-1)}{2}+k<1000,$$

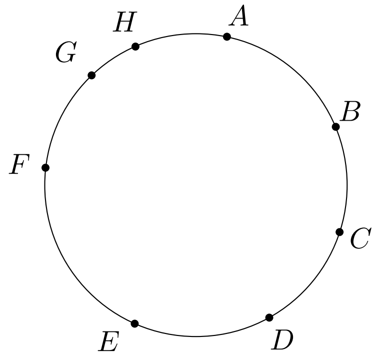
ahol $0<k\le n+1$. A legnagyobb $\frac{n(n-1)}{2}$ alakú szám 1000 alatt a $\frac{45\cdot44}{2}=990$. Ekkor a 45. lépésben legfeljebb 9 aranyat kaphatna az első kalóz. Azonban addig lépéspáronként mindig 1-gyel nő az aranyak különbsége a második kalóz javára, így ezt a 22 aranytalléros különbséget az utolsó lépés nem tudja kiegyenlíteni. Így az osztozkodás legfeljebb 44 lépéses lehet. Ekkor az első 42 lépésben $\frac{43\cdot42}{2}=903$ arany osztódik ki úgy, hogy a másodikhoz 21-gyel több kerül. A 43. lépésben az első kap 43-at (így nála lesz 22-vel több), majd a 44. lépésben a második 22-t, ezzel egyenlőség lesz. A kiosztott aranyak száma így $903+43+22=968$, ez a zsákmány maximális értéke.

44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő, 2. nap - 2015. május 30.

HETEDIK OSZTÁLY - Megoldások

1. Adott egy kör kerületén 8 pont, A, B, C, D, E, F, G, H.



Hány olyan konvex sokszög létezik, amelynek az AD szakasz átlója, csúcsai pedig a nyolc pont közül kerülnek ki?

Megoldás
Mivel AD a sokszög átlója, ezért mindkét oldalán van legalább 1 csúcsa a sokszögnek. A B és C pontokat tartalmazó ívről így 3-féleképpen választhatunk (C, D, CD). Az E, F, G, H pontokat tartalmazó ívről pedig $2^4 - 1 = 15$-féleképpen (E, F, G, H, EF, EG, EH, FG, FH, GH, EFG, EFH, EFH, FGH, $EFGH$). Mivel a két választás független, összesen $3 \cdot 15 = 45$ ilyen sokszög létezik.

2. Egy számmisztikával foglalkozó klub tagjai az $1, 2, 3, \ldots, 11$ számok közül némelyik számot szerencsésnek, a többit szerencsétlennek nevezik. A következőket árulták el a számaikról:

- Ha egy szám szerencsés, akkor az őt összegben 12-re kiegészítő szám is szerencsés.
- Ha egy szám szerencsés, akkor az osztói is szerencsés számok.
- Van páros szerencsés szám.
- A szerencsétlen számok száma is szerencsétlen szám.

Határozd meg, hogy melyek a szerencsés számok!

Megoldás
Mivel van páros szerencsés szám, ennek osztója az 1 és a 2, így ezek mindenképp szerencsés számok. Ebből következően a $12 - 2 = 10$ és a $12 - 1 = 11$ is szerencsés. Mivel 10-nek osztója, ezért az 5 is szerencsés, emiatt viszont a $12 - 5 = 7$ is az. Ekkor legfeljebb 5 darab szerencsétlen szám maradt. Mivel az 1, 2, 5 szerencsés számok, ezért szerencsétlen számból csak 3 vagy 4 darab lehet. Ha a 6 szerencsés lenne, akkor emiatt a 3 és emiatt a 9 is az lenne, vagyis 3-nál kevesebb szerencsétlen szám lenne, ami lehetetlen. Így a 6 szerencsétlen. A 4 és a 8, valamint a 3 és a 9 mindenképp együtt szerencsések vagy szerencsétlenek. Így a szerencsétlen számok száma csak 3 lehet. Ekkor viszont a 3 (és a 9) szerencsétlenek, tehát a 4 és a 8 szerencsések. Azaz a szerencsés számok: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11.

3. Hány négyzetszám van az $1476, 14076, 140076, 1400076, 14000076, \ldots$ végtelen számsorozatban?

Első megoldás

A sorozat minden tagja $14 \cdot 10^k + 70 + 6$ alakú, ezért 7-tel osztva 6-ot ad maradékul. Nézzük a négyzetszámok 7-es maradékait. A maradékok szorzási szabálya alapján:

n 7-es maradéka	n^2 7-es maradéka
0	$0 \cdot 0 = 0$
1	$1 \cdot 1 = 1$
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$3 \cdot 3 = 9 \to 2$
4	$4 \cdot 4 = 16 \to 2$
5	$5 \cdot 5 = 25 \to 4$
6	$6 \cdot 6 = 36 \to 1$

Látható, hogy négyzetszám 7-es maradéka sosem lesz 6, így a sorozatban nincs négyzetszám.

Második megoldás

A sorozat tagjai 76-ra végződnek, ezért oszthatóak 4-gyel. Egy 4-gyel osztható szám pontosan akkor négyzetszám, ha a negyede is az. 4-gyel elosztva a tagokat a $369, 3519, 35019, 350019, 3500019, \ldots$ sorozatot kapjuk. A 369 könnyen ellenőrizhetően nem négyzetszám, a sorozat minden további tagja pedig 19-re végződik, és ezért 4-gyel osztva 3 maradékot ad. Négyzetszám 4-es maradéka viszont csak 0 vagy 1 lehet. Így ebben a sorozatban nincs négyzetszám, tehát az eredetiben sincs.

4. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 7$ és $BC = 4$. Az A középpontú AB sugarú kör a CD oldalt E-ben metszi. A téglalap belsejében lévő BE körív felezőpontja F. Az F pontból AB-re, illetve AD-re állított merőlegesek talppontjai G és H. Mekkora az $AGFH$ téglalap területe?

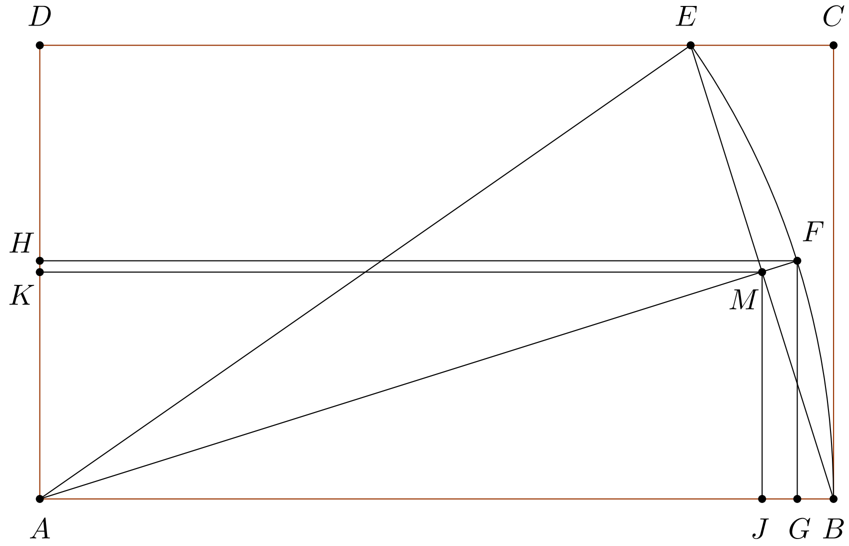
Első megoldás

Az AF egyenes az ABE egyenlő szárú háromszög szárszögének szögfelezője, ezért súlyvonal is egyben. Legyen BE felezőpontja M, ekkor $T_{ABE} = 2 \cdot T_{AMB}$. Az ABF háromszög is egyenlő szárú, az AB és AF szárakhoz tartozó magasságai FG és BM, ezek is egyenlők. Így az AGF és AMB háromszögek egybevágóak, mert két oldalban ($AF = AB$, $FG = BM$) és a nagyobbikkal szemközti szögben (90°) megegyeznek.

$$T_{AGFH} = 2 \cdot T_{AGF} = 2 \cdot T_{AMB} = T_{ABE}$$

Az ABE háromszög AB oldalhoz tartozó magasságának hossza megegyezik a BC oldal hosszával. Így

$$T_{AGFH} = T_{ABE} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14.$$



Második megoldás

(Sok Pitagorasz-tétellel.) Az AED derékszögű háromszögből a DE befogó hossza $\sqrt{49-14}=\sqrt{33}$, így $EC=7-\sqrt{33}$. A BEC derékszögű háromszögből a BE átfogó hossza:

$$BE=\sqrt{(7-\sqrt{33})^2+16}=\sqrt{98-14\sqrt{33}}.$$

Mivel $BM=BE/2$, az eddigiekhez hasonlóan

$$AM=\sqrt{49-BE^2/4}=\sqrt{49-24,5+3,5\sqrt{33}}=\sqrt{24,5+3,5\sqrt{33}}.$$

Az M pontból merőlegest állítunk AB-re és AD-re: így kapjuk J-t és K-t. Könnyen látható, hogy $MJ=2$ és $MK=3,5+0.5\sqrt{33}$. Így az $AJMK$ téglalap területe $7+\sqrt{33}$. $AJMK$ és $AGFH$ hasonlóak, a hasonlóság aránya $AF/AM=7/\sqrt{24,5+3,5\sqrt{33}}$, azaz a területek aránya

$$(AF/AM)^2=49/(24,5+3,5\sqrt{33})=98/(49+7\sqrt{33})=14/(7+\sqrt{33}).$$

Így végül a keresett terület: $(7+\sqrt{33})\cdot 14/(7+\sqrt{33})=14$.

44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő, 1. nap - 2015. május 29.

NYOLCADIK OSZTÁLY - Megoldások

1. A sakktáblán pirosra van színezve 3 mező. Szeretnénk elérni, hogy bármely piros mezőről bármely másik piros mezőre el lehessen jutni úgy, hogy csak piros mezőket érintünk, és mindig oldallal szomszédos mezőre lépünk tovább. Mutassuk meg, hogy ehhez legfeljebb 12 további mezőt kell pirosra színezni!

   Megoldás
   1. eset: Tegyük fel, hogy a 3 piros mező három különböző oszlopban van. Vegyük azt az oszlopot, amelyik a három mező oszlopa közül a középső, és ebben minden mezőt színezzünk pirosra: ez eddig legfeljebb 7 mező. A másik két mezőtől sétáljunk el vízszintes irányban eddig az oszlopig: az érintett mezőket színezzük pirosra: ez legfeljebb 8-3=5 piros mező. Így legfeljebb 7+5=12 mezőt színeztünk pirosra, és a feladat feltételeit teljesítettük. 2. eset: a 3 piros mező közül legalább kettő egy oszlopban van. Vegyük azt az oszlopot, amelyikben legalább két piros mező van, és ezt színezzük pirosra: így legfeljebb 6 mezőt színeztünk eddig pirosra. A harmadik piros mező oszlopától sétáljunk el eddig az oszlopig, és az utunk során érintett mezőket színezzük pirosra. Így legfeljebb további 6 mezőt színeztünk pirosra. A kapott legfeljebb 6+6=12 mező teljesíti a feladat feltételeit.

2. Mennyi lehet $p+q$ és p^2+q^2 legnagyobb közös osztója, ahol p és q két különböző pozitív prímszám?

   Első megoldás
   Ha az r prímszám osztja a $p+q$ és a p^2+q^2 számot, akkor osztja a $(p+q)^2-(p^2+q^2)=2pq$ számot is. A $2pq$ szám prímosztói: 2, p és q, így r csak ezek egyike lehet. p és q nem jön szóba, hiszen ha például p osztja $p+q$-t, akkor q-t is osztania kéne, ami lehetetlen, hiszen p és q két különböző pozitív prímszám. Így r csak a 2 lehet. A 4 már nem oszthatja p^2+q^2-et, hiszen a 4-es maradék vizsgálata alapján ez csak páros p és q mellett lenne lehetséges, de ekkor $p=q=2$, amit a feladat szövege kizárt. Tehát a két szám legnagyobb közös osztója csak 1 vagy 2 lehet, és ezekre van is példa: az első esetben pl. $p=2$ és $q=3$, a második esetben pedig $p=3$ és $q=5$.

   Második megoldás
   Ha d jelöli a legnagyobb közös osztót, akkor d osztja $(p+q)(p-q)=p^2-q^2$-et is. Ezek szerint $d|(p^2-q^2)+(p^2+q^2)=2p^2$ és $d|(p^2+q^2)-(p^2-q^2)=2q^2$. Mivel p és q különböző pozitív prímek, így $2p^2$ és $2q^2$ legnagyobb közös osztója 2, azaz d-nek osztania kell a 2-t, így csak 1 vagy 2 lehet. Az előző megoldásban láttuk, hogy ez a két eset meg is valósul. *Megjegyzés*
   Az utolsó 1 pont akkor is jár, ha a versenyző példát mutat a két eshetőségre.

3. Igaz-e, hogy 20 egymást követő egész számból mindig kiválasztható 10 úgy, hogy a kiválasztott számok összege relatív prím legyen a nem kiválasztott számok összegéhez?

   Megoldás
   Igen, igaz. Legyen a 20 egymást követő egész szám $a-9, a-8, ..., a, a+1, ..., a+10$. Ezek összege $20a+10$. Célunk az, hogy a két összeg $10a+3$ és $10a+7$ legyen. Ez a két szám valóban relatív prím, mert a legnagyobb közös osztójuk osztja a különbségüket, a 4-et is, így csak 1, 2 vagy 4 lehet, de mivel mindkét szám páratlan, így a 2 és a 4 nem lehet közös osztó. Ez a kettéosztás megvalósítható. Az egyik csoport: $a-9, a-8, a-7, a-6, a-5, a+5, a+6, a+8, a+9, a+10$, a másik pedig: $a-4, a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+7$. *Megjegyzés* 1 pont akkor is jár, ha a

$10a+3$ és a $10a+7$ helyett a versenyző két olyan számot mond, melyek összege $20a+10$, és a értékétől függetlenül relatív prímek (nem kell, hogy a két szám kettéosztással megvalósítható legyen). Ha megfelelő kettéosztást is mutat, még 1 pont jár az előző 1 pont mellé.

4. Két rabló a következő módon osztozkodik a zsákmányolt aranytallérokon: „1 neked, 2 nekem, 3 neked, 4 nekem stb.", amíg az aranytallérokból futja. A végén a soron következő rabló megkapja a maradék aranytallérokat. Tudjuk, hogy 1000 aranytallérnál kevesebb volt a zsákmányuk, és azt is, hogy az osztozkodás végén mindkét rabló egyforma számú aranytallért kapott. Legfeljebb hány aranytallér lehetett a zsákmány?

Első megoldás

Mivel egy lépéspárban a második rabló mindig 1-gyel több tallért kap, $2k$ számú teljes lépés után k-val több aranya van. Az utolsó (csonka) lépéspár innen kétféleképp adhat egyenlőséget: vagy az első kap k darabot és ezzel vége, vagy az első kap $2k+1$-et és a második $k+1$-et. Az első esetben

$$1+2+...+2k+k=\frac{(2k+1)2k}{2}+k=(2k+1)k+k=2k(k+1)$$

a tallérok száma, a második esetben pedig

$$1+2+...+2k+1+k+1=\frac{(2k+2)(2k+1)}{2}+k+1=(k+1)(2k+1)+k+1=2(k+1)(k+1).$$

A $2k(k+1)$ alakú számokból 1000 alatt a $2\cdot 21\cdot 22=924$ a legnagyobb, a $2(k+1)(k+1)$ alakúakból pedig a $2\cdot 22\cdot 22=968$. Tehát legfeljebb 968 tallér lehetett a zsákmány.

Második megoldás

Nevezzük A-nak a rablót, aki 1 aranytallért kap, B-nek a másikat. Kétféle módon állhat elő a feladatban leírt helyzet: vagy mindkét rabló n-szer kap aranytallért, és A kapja a maradékot, vagy A n-szer, B $n-1$-szer kap aranytallért, és B kapja a maradékot. Az első esetben B zsákmánya $2+4+6+...+2n=n(n+1)$ aranytallér. Ez az eset meg is valósulhat, mert a maradék, ami A-nak jut, $2+4+6+...+2n-(1+3+...+2n-1)=n$, ami kevesebb, mint $2n+1$. Ekkor a a zsákmány $2n(n+1)$ aranytallér, melynek legnagyobb lehetséges 1000-nél kisebb értéke a 924 ($n=21$ esetén). A második esetben A zsákmánya $1+3+...+2n-1=n^2$ aranytallér. A B-nek jutó maradék $1+3+...+2n-1-(2+4+...+2n-2)=n$, és ez lehetséges, mert kevesebb, mint $2n$. Ekkor a teljes zsákmány $2n^2$, melynek legnagyobb lehetséges 1000-nél kisebb értéke 968 ($n=22$ esetén). Tehát a feladat kérdésére a válasz: 968 aranytallér.

Harmadik megoldás a versenyzők dolgozatai alapján

Nézzük meg, hány teljes körből állhatott az osztozkodás. 43 teljes kör esetén a teljes körök végén az első rabló $1+3+...+43=22^2=484$ aranyat kapott, a második rabló pedig könnyen látható módon 22-vel kevesebbet, azaz 462 aranyat. Az egyenlőséghez a második rablónak még 22 aranyat kell kapnia, ami lehetséges, mert a teljes kör 44 aranyból állna. Ez összesen 968 arany. Ha legfeljebb 42 teljes kör volt, a kiosztott aranyak száma kevesebb, mint 1+2+...+43=484+462=946. Ha legalább 44 teljes kör volt, akkor a második rabló legalább 2+4+...+44=506 aranyat kapott, és mivel az elsőnek is legalább ennyit kellett kapnia, így összesen 1000-nél több aranyat kaptak, ami kizárt. Így a feladat kérdésére a válasz: 968 aranytallér.

Negyedik megoldás a versenyzők dolgozatai alapján

Az aranytallérok száma akkor a lehető legnagyobb, ha az osztozkodási lépések száma is a lehető legnagyobb. Tegyük fel, hogy n lépés történik, ahol az utolsónál már nem feltétlenül kap pontosan n tallért (csak k-t) a soron következő. Ekkor a kiosztott aranyak száma

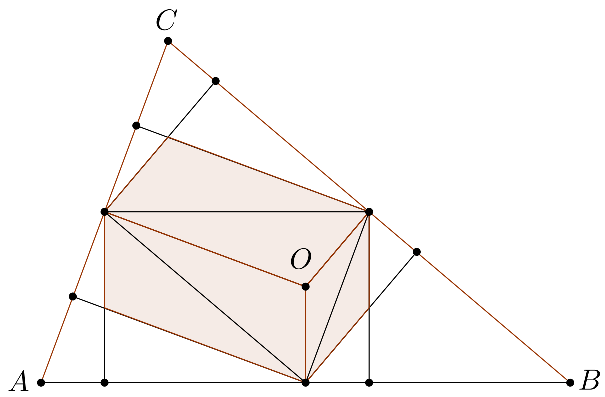
$$1+2+\ldots+n-1+k=\frac{n(n-1)}{2}+k<1000,$$

ahol $0 < k \leq n+1$. A legnagyobb $\frac{n(n-1)}{2}$ alakú szám 1000 alatt a $\frac{45 \cdot 44}{2} = 990$. Ekkor a 45. lépésben legfeljebb 9 aranyat kaphatna az első kalóz. Azonban addig lépéspáronként mindig 1-gyel nő az aranyak különbsége a második kalóz javára, így ezt a 22 aranytalléros különbséget az utolsó lépés nem tudja kiegyenlíteni. Így az osztozkodás legfeljebb 44 lépéses lehet. Ekkor az első 42 lépésben $\frac{43 \cdot 42}{2} = 903$ arany osztódik ki úgy, hogy a másodikhoz 21-gyel több kerül. A 43. lépésben az első kap 43-at (így nála lesz 22-vel több), majd a 44. lépésben a második 22-t, ezzel egyenlőség lesz. A kiosztott aranyak száma így $903 + 43 + 22 = 968$, ez a zsákmány maximális értéke.

5. Egy hegyesszögű háromszög oldalfelező pontjaiból merőlegeseket állítottunk a másik két oldalra. A 6 merőleges által közrezárt hatszög területe hányadrésze a háromszög területének?

Első megoldás

Állítsunk merőlegeseket az oldalfelező pontokból a felezőpontot tartalmazó oldalakra. A kapott három merőleges egy ponton megy át, a háromszög körülírt körének középpontján, melyet jelöljön O. Az oldalfelező pontokat kössük össze O-val. A kapott három szakasz hatszögünket három parallelogrammára bontja (hiszen mindhárom kapott négyszögnek két-két párhuzamos oldalpárja van). Behúzva a parallelogrammák O pontot nem tartalmazó átlóit azonnal adódik, hogy a hatszög területe duplája az oldalfelező pontok által alkotott háromszögnek. Mivel a középvonalak négy egybevágó háromszögre bontanak egy háromszöget, így az oldalfelező pontok által alkotott háromszög területe negyede az eredeti háromszög területének, tehát a hatszög területe fele az eredeti háromszög területének.

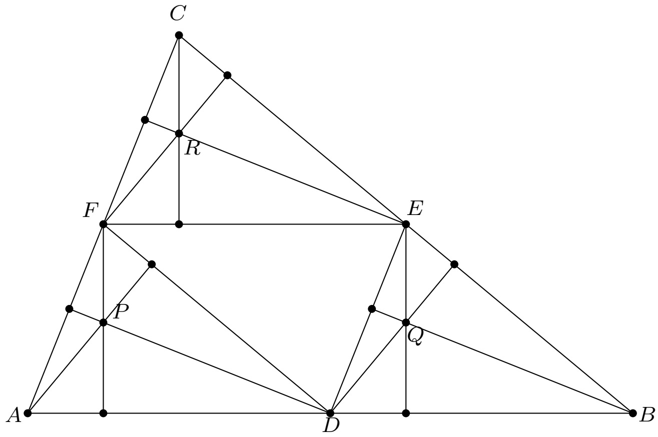


Második megoldás a versenyzők dolgozatai alapján

Jelölje D, E és F a megfelelő oldalak felezőpontjait. Állítsunk merőlegest az A csúcsból a DF középvonalra. Vegyük észre, hogy ez az egyenes tartalmazza a hatszög ábrán P-vel jelölt csúcsát, hiszen ez a P pont az ADF háromszög magasságpontja, mert rajta van a háromszög D-ből és F-ből induló magasságvonalán. Hasonlóan igazolható, hogy a R és Q az CEF és a BDE háromszög magasságpontja. Az FRE és a DQB háromszög egybevágó, hiszen FR párhuzamos DQ-val (mindkettő merőleges BC-re), RE párhuzamos QB-vel (mindkettő merőleges AC-re), és CE és DB párhuzamosak és egyforma hosszúak (a középvonal jól ismert tulajdonsága miatt). Hasonlóan elmondható, hogy az FPD és az EQB háromszög egybevágó. Így tehát a hatszög területe felírható a következőképpen:

$$T_{DEF}+T_{DEQ}+T_{EFR}+T_{FDP} = T_{DEF}+T_{DEQ}+T_{BDQ}+T_{EBQ} = T_{DEF}+T_{EDB} = 2 \cdot T_{ABC}/4 = T_{ABC}/2.$$

Azaz a hatszög területe a háromszög területének a fele.


C
R
F
E
P
Q
A
D
B

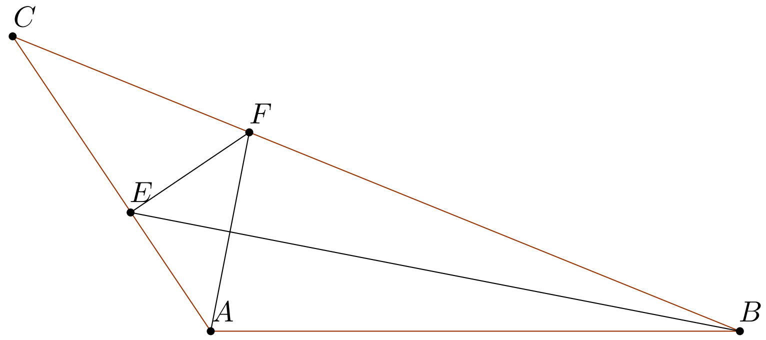
44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő, 2. nap - 2015. május 30.

NYOLCADIK OSZTÁLY - Megoldások

1. Az ABC háromszögben a B csúcsból induló szögfelező az AC oldalt az E pontban metszi. Tudjuk, hogy a BEA szög nagysága $45°$. Vegyük fel a BC oldalon az F pontot úgy, hogy $BF = BA$ legyen. Mekkora az EFA szög nagysága?

   Megoldás
   Mivel a AFB háromszög egyenlőszárú, így a B csúcsból induló szögfelező egyben felezőmerőlegese is az AF szakasznak. Ez azt jelenti, hogy $FE = AE$. Így az AFE háromszög egyenlő szárú. Az eddigiek alapján A tükörképe a BE egyenesre F, így $AEF\sphericalangle = 2 \cdot 45° = 90°$. Így végül $EFA\sphericalangle = (180° - 90°)/2 = 45°$.



2. Egy 8×8-as sakktáblán a következő játékot játssza két játékos: az első játékos elhelyezi a királyt a tábla egyik mezőjén, majd felváltva lépnek a királlyal (az első lépést a királlyal a második játékos teszi). Olyan mezőre szabad csak lépnie a soron következő játékosnak, ahol a király még nem járt. Az a játékos veszít, aki már nem tud lépni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Adj meg egy nyerő stratégiát! (A királlyal egy lépés során egy él- vagy egy csúcsszomszédos mezőre szabad lépni.)

   Megoldás
   A második játékosnak van nyerő stratégiája. Osszuk fel a sakktáblát 1×2-es tégla-lapokra. A második játékos stratégiája a következő: akárhova lép az első játékos (illetve kezdetben helyezi a királyt), ő a mezőt tartalmazó 1×2-es téglalap másik mezőjére lép. Ez valóban nyerő stratégia: a második játékos minden lépése után igaz az, hogy a kijelölt 1×2-es téglalapokban vagy mindkét mezőn járt a király, vagy egyiken sem, és így az első játékos csak úgy tud lépni, hogy egy eddig nem érintett téglalapba belép. Így viszont a második játékos mindig tud lépni az első játékos lépése után, és mivel a játék véges sok lépésben véget ér, az első játékos fog elakadni.

3. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 7$ és $BC = 4$. Az A középpontú AB sugarú kör a CD oldalt E-ben metszi. A téglalap belsejében lévő BE körív felezőpontja F. Az F pontból AB-re, illetve AD-re állított merőlegesek talppontjai G és H. Mekkora az $AGFH$ téglalap területe?

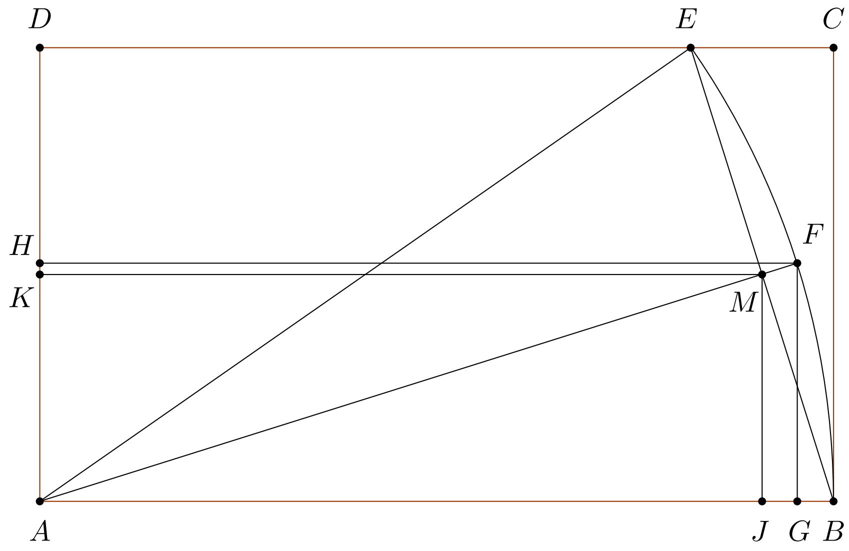
   Első megoldás
   Az AF egyenes az ABE egyenlő szárú háromszög szárszögének szögfelezője, ezért súlyvonal is egyben. Legyen BE felezőpontja M, ekkor $T_{ABE} = 2 \cdot T_{AMB}$. Az ABF háromszög is egyenlő szárú, az AB és

AF szárakhoz tartozó magasságai FG és BM, ezek is egyenlők. Így az AGF és AMB háromszögek egybevágóak, mert két oldalban ($AF = AB$, $FG = BM$) és a nagyobbikkal szemközti szögben (90°) megegyeznek.

$$T_{AGFH} = 2 \cdot T_{AGF} = 2 \cdot T_{AMB} = T_{ABE}$$

Az ABE háromszög AB oldalhoz tartozó magasságának hossza megegyezik a BC oldal hosszával. Így

$$T_{AGFH} = T_{ABE} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14.$$



Második megoldás
(Sok Pitagorasz-tétellel.) Az AED derékszögű háromszögből a DE befogó hossza $\sqrt{49-14} = \sqrt{33}$, így $EC = 7 - \sqrt{33}$. A BEC derékszögű háromszögből a BE átfogó hossza:

$$BE = \sqrt{(7-\sqrt{33})^2 + 16} = \sqrt{98 - 14\sqrt{33}}.$$

Mivel $BM = BE/2$, az eddigiekhez hasonlóan

$$AM = \sqrt{49 - BE^2/4} = \sqrt{49 - 24,5 + 3,5\sqrt{33}} = \sqrt{24,5 + 3,5\sqrt{33}}.$$

Az M pontból merőlegest állítunk AB-re és AD-re: így kapjuk J-t és K-t. Könnyen látható, hogy $MJ = 2$ és $MK = 3,5 + 0.5\sqrt{33}$. Így az $AJMK$ téglalap területe $7 + \sqrt{33}$. $AJMK$ és $AGFH$ hasonlóak, a hasonlóság aránya $AF/AM = 7/\sqrt{24,5+3,5\sqrt{33}}$, azaz a területek aránya

$$(AF/AM)^2 = 49/(24,5 + 3,5\sqrt{33}) = 98/(49 + 7\sqrt{33}) = 14/(7 + \sqrt{33}).$$

Így végül a keresett terület: $(7 + \sqrt{33}) \cdot 14/(7 + \sqrt{33}) = 14$.

4. Egy teremben 20 ember van, akik között eddig nem történt kézfogás. A terembe 5 percenként belép egy új ember, és kezet fog pontosan két jelenlévővel. Azonban bármelyik résztvevő a harmadik kézfogása után rögtön elhagyja a termet és többé nem tér vissza. Bizonyítsd be, hogy egy idő után valaki egyedül marad a teremben!

Első megoldás
Tegyük fel indirekt módon, hogy senki nem marad egyedül a teremben. Ekkor mindig be tud lépni

egy új ember a terembe, tehát az is lehetséges, hogy 60 új ember belép a terembe. Ekkor a kézfogások száma a 60. ember belépése után pontosan 120 (a belépő emberek nézőpontjából számolva). A lépés végén a teremben maradó emberek száma legyen n, így eddig $80 - n$ ember távozott a teremből. A teremben maradt emberek mindegyike legfeljebb két emberrel fogott kezet, a távozottak mindegyike pedig pontosan hárommal, így a kézfogások száma legfeljebb $(2n + 3(80 - n))/2 = (240 - n)/2$. Tehát $120 \leq (240 - n)/2$, azaz $n \leq 0$, ami ellentmondás, hiszen az újonnan érkező ember mindig benn marad a teremben. Az ellentmondás igazolja az állítást.

Második megoldás

Egy adott helyzetben jelölje a a teremben lévő emberek számát, akik még senkivel nem fogtak kezet, b a teremben lévő emberek számát, akik pontosan egy emberrel fogtak kezet, c pedig a teremben lévő emberek számát, akik pontosan két emberrel fogtak kezet. Egy új ember belépése után az (a, b, c) számhármas a következőképp módosulhat: $(a - 2, b + 2, c + 1)$ (a belépő két nullással fogott kezet), $(a - 1, b, c + 2)$ (egy nullással és egy egyessel fogott kezet), $(a - 1, b + 1, c)$ (egy nullással és egy kettessel fogott kezet), $(a, b - 2, c + 3)$ (két egyessel fogott kezet), $(a, b - 1, c + 1)$ (egy egyessel és egy kettessel fogott kezet), $(a, b, c - 1)$ (két kettessel fogott kezet). Vegyük észre, hogy a $3a + 2b + c$ összeg minden esetben eggyel csökken. Kezdetben az összeg 60, így legfeljebb 59 lépés után egy ember fog a teremben maradni (különben lehetne újabb lépést tenni).

Harmadik megoldás

(Változat az előzőre) Kezdetben mindenkinél a teremben legyen 3 kavics. Amikor valaki belép, vegyen el azoktól, akikkel kezet fog, egy-egy kavicsot, és egyet dobjon el (így nála egy kavics lesz). Minden lépés után igaz az, hogy aki még nem fogott kezet, annál 3 kavics van, aki egy emberrel fogott kezet, annál 2, aki pedig két emberrel, annál 1. Akinek elfogy a kavicsa, távoznia kell, hiszen már három emberrel fogott kezet. Mivel minden lépésben eggyel csökken a kavicsok száma, ezért legfeljebb 59 lépésig tart az eljárás. (Sőt, mivel a végén benn maradt ember kezében 1, 2 vagy 3 kavics van, így a lépésszám csak 59, 58 vagy 57 lehet).

Negyedik megoldás

Számoljuk meg, hogy az egyes emberek még hányszor foghatnak kezet, mielőtt távozniuk kell, és vegyük ezen számok összegét. Kezdetben ez $20 \cdot 3 = 60$. Amikor belép valaki, akkor az összeg 3-mal nő, a két kézfogás eredményeképpen viszont (minden kézfogás mindkét résztvevőtől egy lehetőséget vesz el) 4-gyel csökken. Így egy ember belépése és kézfogásai után az összeg 1-gyel csökken. Ez a folyamat mindaddig ismétlődik, amíg van legalább két ember a teremben (hiszen velük megtörténhet a két kézfogás). Az 59. belépő kézfogásai után viszont az összeg 1, így ekkor már csak egyetlen ember lehet a teremben (hiszen akinek nincs több lehetősége a kézfogásra, annak távoznia kellett).